

**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Franklin Delano Cavalcante Leitão

**Métodos sem malha: aplicações do método de  
Galerkin sem elementos e do método de  
interpolação de ponto em casos estruturais**

Rio de Janeiro

2010

Franklin Delano Cavalcante Leitão

## **Métodos sem malha: aplicações do método de Galerkin sem elementos e do método de interpolação de ponto em casos estruturais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Mecânica dos Sólidos.



Orientador: Prof. Dr. Humberto Lima Soriano

Rio de Janeiro  
2010

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CTC/B

L533

Leitão, Franklin Delano Cavalcante

Métodos sem malha: aplicações do método de Galerkin sem elementos e do método de interpolação de ponto em casos estruturais / Franklin Delano Cavalcante Leitão. – 2010.  
95 f.: il.

Orientador: Humberto Lima Soriano.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Método dos elementos finitos. 2. Mecânica dos sólidos. 3. Materiais. I. Soriano, Humberto Lima. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 512.624

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos a reprodução total ou parcial desta dissertação.

---

Assinatura

---

Data

Franklin Delano Cavalcante Leitão

## **Métodos sem malha: aplicações do método de Galerkin sem elementos e do método de interpolação de ponto em casos estruturais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Mecânica dos Sólidos.

Aprovado em \_\_\_\_\_

Banca Examinadora: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Humberto Lima Soriano (Orientador)  
Faculdade de Engenharia da UERJ

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Emil de Souza Sánchez Filho  
Escola de Engenharia da UFF

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Francisco José da Cunha Pires Soeiro  
Faculdade de Engenharia da UERJ

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Sérgio Hampshire de Carvalho Santos  
Escola Politécnica da UFRJ.

Rio de Janeiro  
2010

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Franklin Delano Cardoso Leitão e Irenice Cavalcante Leitão, pelo infinito amor dedicado a mim ao longo de suas vidas.

À minha esposa, Rachel Cristina de A. M. F. Leitão, e ao meu filho, Franklin Martins Leitão, uma homenagem pela compreensão de minha ausência para realização de um sonho pessoal.

Ao meu orientador, Prof. Humberto Lima Soriano, por toda atenção a mim dispensada.

## RESUMO

LEITÃO, Franklin D. C. *Métodos sem malha: aplicações do método de Galerkin sem elementos e do método de interpolação de ponto em casos estruturais*. Brasil. 2010. 95 f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

Apesar de serem intensamente estudados em muitos países que caminham na vanguarda do conhecimento, os métodos sem malha ainda são pouco explorados pelas universidades brasileiras. De modo a gerar uma maior difusão ou, para a maioria, fazer sua introdução, esta dissertação objetiva efetuar o entendimento dos métodos sem malha baseando-se em aplicações atinentes à mecânica dos sólidos. Para tanto, são apresentados os conceitos primários dos métodos sem malha e o seu desenvolvimento histórico desde sua origem no método *smooth particle hydrodynamic* até o método da partição da unidade, sua forma mais abrangente. Dentro deste contexto, foi investigada detalhadamente a forma mais tradicional dos métodos sem malha: o método de Galerkin sem elementos, e também um método diferenciado: o método de interpolação de ponto. Assim, por meio de aplicações em análises de barras e chapas em estado plano de tensão, são apresentadas as características, virtudes e deficiências desses métodos em comparação aos métodos tradicionais, como o método dos elementos finitos. É realizado ainda um estudo em uma importante área de aplicação dos métodos sem malha, a mecânica da fratura, buscando compreender como é efetuada a representação computacional da trinca, com especialidade, por meio dos critérios de visibilidade e de difração. Utilizando-se esses critérios e os conceitos da mecânica da fratura, é calculado o fator de intensidade de tensão através do conceito da integral J.

Palavras-chave: Método de Galerkin sem elementos, mínimos quadrados móveis, método de interpolação de ponto, trinca, mecânica da fratura, critério de visibilidade, critério de difração.

## ABSTRACT

Although the meshless methods are deeply researched in many countries that are in state of art of scientific knowledge, these methods are still unknown by many brazilian universities. So that spreading out that knowledge or, for many people, introducing them to the subject, this work tries to understand the meshless methods on solid mechanic applications. To reach this objective, basic concepts of meshless methods and their historic development are introduced since their origin in smooth particle hydrodynamic until partition of unity method, their more general form. In this context, the traditional form of meshless method was deeply investigated: element free Galerkin method and also another different method: point interpolation method. So, advantages and disadvantages, comparing to finite elements methods, are shown by analyses in bars and plates in state of plane stress. This work also researched an important area of meshless application, the fracture mechanics, to understand how a crack is computationally represented, particularly, with visibility and diffraction criteria. By these criteria and using fracture mechanics concepts, stress intensity factor is calculated by J-integral concept.

Keywords: Element free Galerkin method, moving least square, point interpolation method, crack, fracture mechanics, visibility criterion, diffraction criterion.

## LISTA DE FIGURAS

1	Composição dos subdomínios recobrando o domínio definido no $R^1$ .	9
2	Sobreposição de subdomínios $\Omega_i$ compondo o domínio $\Omega$ .	9
3	Composição do domínio $\Omega$ por meio da justaposição dos suportes de cada partícula.	16
4	Domínio de influência do nó 1 englobando os espaçamentos nodais adjacentes.	16
5	Distribuição regular de seis nós.	24
6	Chapas com trinca central e com trinca de aresta.	26
7	Tensão no referencial da trinca.	28
8	Modos de fratura. Figura retirada de (BROEK, 1982)	29
9	Aumento da trinca gerando distorção nos elementos.	32
10	Extensão da trinca virtual em duas dimensões.	32
11	Contornos que formam o contorno fechado ao redor da ponta da trinca.	34
12	Dois contornos arbitrários $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ ao redor da ponta da trinca e um contorno arbitrário $\Gamma^*$ cuja a integral tem valor constante.	35
13	Variável $q$ representada como uma função platô na ponta da trinca. Figura retirada de (ANDERSON, 1991)	36
14	Elementos de oito e nove nós.	37
15	Degeneração de um elemento bidimensional de nove nós em um triângulo.	37
16	Barra com força distribuída.	40
17	Da esquerda para a direita: função de forma do MGSE, derivada da função de forma do MGSE em relação à $x$ , e derivada da função de forma do MGSE em relação à $y$ .	47
18	Acoplamento entre MGSE e MEF.	50
19	Acoplamentos da esquerda para a direita e de cima para baixo com: 1 nó MGSE e 3 nós MEF, 3 nós MGSE e 1 nó MEF, e 2 nós MGSE e 2 nós MEF. Figura retirada de (LACROIX; BOUILLARD, 2003).	52

20	Da esquerda para a direita: o enquadramento da estrutura em células de integração e a divisão das células de integração em elementos. Figura retirada de (SANTANA, 2004). . . . .	54
21	Domínio de influência dos nós J e I sendo contados pela trinca segundo o critério de visibilidade. . . . .	55
22	Representação do domínio de influência do nó segundo o critério de difração. . . . .	56
23	Distribuição de nós comuns e enriquecidos nas proximidades da trinca. . . . .	60
24	Barra com força distribuída . . . . .	62
25	Comparativo entre a solução analítica e a numérica do MIP para força $f^B(x)$ constante. . . . .	63
26	Comparativo entre a solução analítica e a numérica do MGSE para força $f^B(x)$ proporcional à posição. . . . .	64
27	Força concentrada na extremidade. . . . .	64
28	Força unitária na extremidade com 11 nós igualmente espaçados, utilizando-se o MIP. . . . .	65
29	Força concentrada no ponto médio . . . . .	65
30	Força unitária no ponto médio da barra utilizando-se o MGSE. . . . .	66
31	Força unitária aplicada fora das posições nodais utilizando-se o MGSE. . . . .	66
32	Chapa fixa na origem e sobre roletes em x igual a zero com força distribuída p constante aplicada no contorno direito. . . . .	67
33	Chapa engastada com força distribuída p constante aplicada no contorno superior. . . . .	67
34	Chapa engastada com força distribuída p aplicada no contorno direito. . . . .	68
35	Exemplo de distribuição de nós coincidentes com a malha de integração. . . . .	68
36	Deslocamentos para o primeiro caso bidimensional utilizando-se o MIP com base linear. Em preto estão os representados os deslocamentos na direção x dos nós da extremidade livre e, em azul, os deslocamentos dos nós restritos. . . . .	69
37	Deslocamentos para o primeiro caso bidimensional utilizando-se o MIP com base linear. Em preto estão os representados os deslocamentos na direção y dos nós do contorno inferior e, em azul, os do contorno superior. . . . .	69
38	Função de Forma MIP com base linear. . . . .	70
39	Força obtida a partir de função de forma do MIP com base linear. . . . .	70

40	Força obtida a partir de função de forma do MIP com base quadrática.	71
41	Deslocamento da linha média da chapa representada na figura 33.	72
42	Diagrama para cálculo do momento fletor em relação ao ponto A.	72
43	Deslocamento da linha média do caso representado na figura 34 utilizando-se o MIP com base até 5 <sup>a</sup> ordem. . . . .	75
44	Função de Forma MGSE gerada a partir de base quadrática e de uma função exponencial. . . . .	75
45	Deslocamento na direção x dos contornos direto (em preto) e esquerdo (em azul) utilizando-se o MGSE com base quadrática e função peso exponencial. . . . .	76
46	Função de forma gerada pelo MGSE a partir de uma função peso exponencial. . . . .	76
47	Distribuição de força aplicada no contorno para o caso representado na figura 32, utilizando-se o MGSE com base quadrática e função peso exponencial. . . . .	77
48	Função de forma gerada pelo MGSE a partir de uma função peso de <i>spline</i> quártica. . . . .	78
49	Deslocamento na direção y da linha média da chapa representada na figura 34 utilizando-se o MGSE com base quadrática e função peso <i>spline</i> quártica. . . . .	78
50	Distribuição de força aplicada no contorno para o caso representado na figura 34 utilizando-se o MGSE com base quadrática e função peso <i>spline</i> quártica. . . . .	79
51	Corpo trincado sob modo-I de fratura. . . . .	80
52	Função de forma para MGSE cortada por uma trinca central sob critério de visibilidade (à esquerda) e sob critério de difração (à direita). . . . .	80
53	Deslocamentos das extremidades da chapa pelo critério de visibilidade. . . . .	81
54	Deslocamento de pontos distantes 0,1 unidades de comprimento antes e depois da trinca pelo critério de visibilidade. . . . .	81
55	Deslocamentos das extremidades da chapa pelo critério de difração. . . . .	82
56	Deslocamentos de pontos distantes 0,1 unidades antes e depois da trinca pelo critério de difração. . . . .	82

## LISTA DE TABELAS

1	Exemplos de funções peso . . . . .	12
2	Comparativo entre os coeficientes avaliados pelo MIP e MQM. . .	23
3	Valores de $C$ para cálculo de $K_I$ em função do tipo de trinca. . . .	30

## SUMÁRIO

<b>CONSIDERAÇÕES INICIAIS</b>	<b>6</b>
Comparação com outros métodos numéricos . . . . .	7
Histórico . . . . .	9
<b>1 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO APLICADAS</b>	<b>11</b>
1.1 <b>Critérios de aproximação clássicos</b> . . . . .	11
1.1.1 Mínimos quadrados móveis (MQM) . . . . .	11
1.1.2 <i>Smooth particle hydrodynamic</i> (SPH) . . . . .	17
1.1.3 Partição da unidade (PU) . . . . .	19
1.1.4 Método de interpolação de ponto (MIP) . . . . .	22
<b>2 MECÂNICA DA FRATURA</b>	<b>25</b>
2.1 <b>Considerações iniciais</b> . . . . .	25
2.2 <b>Histórico</b> . . . . .	25
2.3 <b>Integral de contorno</b> . . . . .	30
2.3.1 Extensão da trinca virtual: formulação da derivada da rigidez . . . . .	31
2.3.2 Extensão da trinca virtual: abordagem em meio contínuo . . . . .	32
2.3.3 Integral de domínio de energia . . . . .	33
2.4 <b>Implementação</b> . . . . .	36
2.4.1 Separação dos modos . . . . .	37
<b>3 MÉTODO DE GALERKIN SEM ELEMENTOS</b>	<b>40</b>
3.1 <b>Método dos resíduos ponderados</b> . . . . .	40
3.1.1 Método da colocação . . . . .	42
3.1.2 Método dos mínimos quadrados . . . . .	42
3.1.3 Método de Galerkin . . . . .	43
3.2 <b>Método de Rayleigh-Ritz</b> . . . . .	46

<b>3.3 Método de Galerkin sem elementos</b> . . . . .	<b>47</b>
3.3.1 Formulação variacional e discretização . . . . .	48
3.3.2 Acoplamento MGSE-MEF . . . . .	50
<b>3.4 Aplicação do MIP ao método dos resíduos ponderados de Galerkin</b>	<b>52</b>
<b>3.5 Integração do domínio</b> . . . . .	<b>54</b>
<b>4 REPRESENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA TRINCA</b>	<b>55</b>
4.1 Critérios de visibilidade e de difração . . . . .	55
4.2 Enriquecimento da base . . . . .	56
4.3 Funções propositivas enriquecidas . . . . .	57
4.4 Método nuvens HP . . . . .	59
<b>5 RESULTADOS</b>	<b>62</b>
5.1 Casos unidimensionais . . . . .	62
5.2 Casos bidimensionais . . . . .	67
5.3 Corpos trincados . . . . .	79
<b>6 CONCLUSÕES</b>	<b>83</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>85</b>

## CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os métodos sem malha, também chamados de métodos de partículas, são métodos numéricos de resolução de equações diferenciais com condições de contorno ou iniciais, que usam a subdivisão do domínio em subdomínios contendo pontos nodais ou partículas dos quais, a partir de um valor médio segundo algum critério de aproximação, se obtêm valores pontuais. Diferente do método dos elementos finitos (MEF) que subdivide o domínio em subdomínios denominados elementos que compartilham nós e lados com os vizinhos, nos métodos sem malha, os subdomínios são regiões parcialmente superpostas e que cercam cada uma das partículas, além de apresentarem pontos comuns sem conexões de fronteira. Cada subdomínio está associado a um determinado ponto nodal sendo, por esta razão, também conhecido como domínio de influência. Outra diferença em relação aos métodos tradicionais é o critério de aproximação. Este é calculado em função de valores dos pontos dispersos no subdomínio, sendo o valor da função de cada ponto individualmente afetado pelos pontos de sua região circunvizinha, ou seja, de seu domínio de influência. Desse modo, os métodos sem malha não usam a subdivisão do domínio em elementos com interpolação de seus valores nodais para obtenção de valores no interior do mesmo, e sim trabalham com média dos valores pontuais dos seus domínios de influência e não utilizam a clássica malha de elementos. Esta característica torna suficiente aos métodos sem malha o uso de uma malha somente para fins de integração, desvinculando-a da distribuição de pontos nodais. Assim, os pontos nodais são distribuídos aleatoriamente, sem compromisso algum com a malha de integração. Contudo, a distribuição de pontos nodais é costumeira e erroneamente chamada de malha de distribuição nodal. E por serem oriundos de uma abordagem matemática de resolução de equações diferenciais, os métodos sem malha podem ser aplicados a qualquer área do conhecimento onde este campo da matemática se faça necessário, como tais, as áreas fluidas, térmicas, estruturais etc.

Dentro desse contexto, visando o entendimento dessa nova ferramenta numérica, esta dissertação busca realizar o estudo dos métodos sem malha usando abordagens atinentes à mecânica dos sólidos. Os resultados obtidos por essa análise são cotejados com resultados analíticos de problemas estruturais. Para atingir esse objetivo foi utilizado o software *MATLAB*, cujos direitos autorais pertencem à empresa *THE MATHWORKS*.

Por haver diversas vertentes de pesquisa dos métodos sem malha, muitos de seus entraves ainda não foram totalmente resolvidos, e, portanto, ainda não existe um procedimento categórico de resolução como ocorre para o método dos

elementos finitos. Assim, comparando-se diversas técnicas, cada uma apresenta respectivas vantagens e desvantagens. Fazendo alusão a esse método de vanguarda, este trabalho apresenta um caráter pioneiro na Universidade do Estado do Rio de Janeiro e se justifica pelo legado a ser deixado por meio da descrição e utilização de uma ferramenta poderosa e ainda pouco difundida. Justifica-se, também, pela contribuição à comunidade científica de outras implementações do tema e da maior divulgação para um assunto ainda em evolução. Assim, esta dissertação contribui para um incremento na quantidade de pesquisadores que acompanham essa área de conhecimento e cria alicerces para sua massificação e domínio.

O desenvolvimento desta dissertação será efetuado da maneira que se segue. Neste capítulo, os métodos sem malha serão apresentados e terão suas principais características comentadas, de modo a fazer uma introdução ao assunto e uma distinção em relação a outros métodos de resolução numérica de equações diferenciais. Ainda neste capítulo, será citado o objetivo e a importância do assunto, assim como a contribuição deste trabalho e um histórico do desenvolvimento do assunto. No capítulo II será efetuado o estudo de algumas vertentes dos métodos sem malha conduzindo à composição das respectivas funções de forma e destacando suas virtudes e deficiências. No capítulo III serão tratados tópicos pertinentes à Mecânica da Fratura, introduzindo-se um acompanhamento histórico, simultaneamente à apresentação de conceitos. Nesse mesmo capítulo será apresentada a origem e o desenvolvimento do cálculo computacional dos modos de fratura, assim como a separação dos modos. No capítulo IV serão mostradas a origem do método de Galerkin sem elementos e outros métodos que conduzem à resolução de sistemas de equações algébricas. No capítulo V serão tratadas as formas de introdução de trincas computacionalmente. Como assunto derradeiro, mas o de maior importância, os resultados obtidos serão apresentados no capítulo VI, indicando a eficácia dos métodos sem malha na resolução de problemas estruturais. No capítulo VII serão apresentadas as conclusões. Vale ressaltar que, nas equações e expressões matemáticas contidas nos capítulos desta dissertação, variáveis representativas de vetores e matrizes serão escritas em negrito de modo que sejam diferenciadas das demais associadas a escalares.

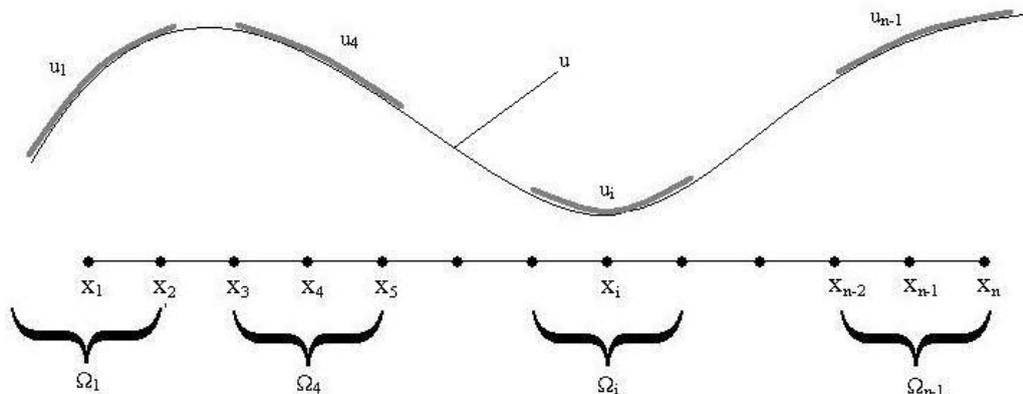
### **Comparação com outros métodos numéricos**

Iniciados acerca de três décadas, os métodos sem malha vem crescendo em importância na mesma medida que maiores esforços de pesquisa vem sendo aplicados ao seu desenvolvimento. Esse impulso adveio da necessidade de re-

solver inconvenientes de métodos convencionais, tais como o dos elementos finitos e o das diferenças finitas. Esses entraves são oriundos dos processos de grandes deformações e de modificações estruturais relacionados a problemas de carácter localizado, como as alterações necessárias a uma malha tradicional de elementos durante um processo de propagação de trincas ou de impacto balístico. A maioria das estratégias para tratamento de descontinuidades móveis em métodos tradicionais é baseada na reconstrução da malha em cada passo da evolução, obrigando a confecção de programas de ajustes de malha para fazer com que suas linhas permaneçam coincidentes com a descontinuidade durante o encaminhamento do problema. Isto introduz numerosas dificuldades, tais como a necessidade de projetar ajustes entre malhas em sucessivos estágios do problema, degradando a acurácia e gerando um acréscimo no tempo computacional associado às inúmeras reconstruções de malha. De modo a contornar esse problema, os métodos sem malha objetivam eliminar pelo menos parte dessa estrutura pela construção de aproximações inteiramente em termos de nós, tratando com distinção a composição dos nós atinentes ao processo de integração e a do cálculo de aproximação da função a ser avaliada, e, portanto, não há a necessidade de reconstrução de malha por não existir a entidade elemento. Dessa forma, o movimento de descontinuidade pode ser tratado sem as sucessivas reconstruções da malha atinentes ao MEF.

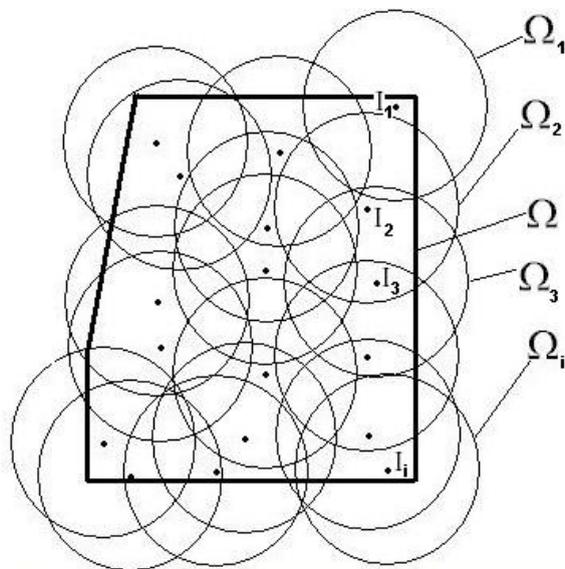
De modo a se ter uma visualização primária de como são realizadas as aproximações em todo o domínio para esses métodos, seja  $u$  uma função definida em um domínio  $\Omega$  no  $R^1$  estendendo de  $x_1$  a  $x_n$ . Essa função é calculada pela junção de aproximações  $u_i$  avaliadas na posição de seu respectivo nó  $x_i$ , em função dos nós contidos em cada subdomínio ou domínio de influência  $\Omega_i$ . É interessante ressaltar que não há a necessidade de um espaçamento nodal regular, assim como o domínio de influência não necessariamente deve ser igual ao dobro do espaçamento nodal, podendo englobar mais nós que somente os vizinhos diretos, contrastando com o MEF. A figura 1 mostra a composição das aproximações locais  $u_i$  e de seus respectivos domínios de influência  $\Omega_i$  ao longo do domínio  $\Omega$ , onde  $x_i$  representa a posição do nó  $i$  ao longo do domínio.

Uma característica comum a diversos métodos sem malha é o uso da função peso. A função peso é uma função com valores positivos no seu respectivo domínio de influência e nula no restante do domínio. Por esta razão, a função peso é definida para ter um suporte compacto, ou seja, o domínio de influência sobre o qual a mesma é não nula é pequeno relativo ao restante do domínio. Além disto, lembrando-se que cada suporte  $\Omega_i$  é associado a um nó  $i$ , os valores da função peso são, em geral, crescentes à medida que se aproxima de seu nó



**Figura 1:** Composição dos subdomínios recobrendo o domínio definido no  $R^1$ .

associado. Isto ocorre de modo a fazer com que as contribuições do domínio de influência para os valores da variável  $u$  avaliada tenham maior relevância próximo ao nó. Em razão da existência das funções de suporte compacto, o domínio de influência ou subdomínio tem uma terceira denominação, a de suporte compacto. Na figura 2 é apresentada uma composição de domínios de influência no  $R^2$ , onde o domínio é subdividido em diversos domínios de influência circulares que se sobrepõem.



**Figura 2:** Sobreposição de subdomínios  $\Omega_i$  compondo o domínio  $\Omega$ .

### Histórico

O primeiro método sem malha que foi estudado continuamente é conhecido como *smooth particle hydrodynamic* (LUCY, 1977), aplicado em modelagem de fenômeno astrofísico sem contorno, tais como explosão de estrelas e

nuvens de poeira. Posteriormente, foi criada a aproximação dos mínimos quadrados móveis, sendo (NAYROLES; TOUZOT; VILLON, 1992) os primeiros a usar essa aproximação no método de Galerkin, chamando-a método do elemento difuso. Esse método foi refinado e modificado por (LU; GU; BELYTCHKO, 1994), introduzindo ainda o recurso dos multiplicadores de Lagrange, renomeando-o método de Galerkin sem elementos. Essa classe de métodos é consistente, conseguindo representar com precisão as funções utilizadas em sua base e, na forma proposta, muito estável, embora substancialmente mais demorada quanto ao processamento que o *smooth particle hydrodynamic*.

Posteriormente, um avanço ocorreu pelo entendimento destes métodos por intermédio dos trabalhos de (DUARTE; ODEN, 1996) e de (BABUSKA; MELLENK, 1995). Esses pesquisadores perceberam que os métodos baseados nos mínimos quadrados móveis são casos específicos do método da partição da unidade, capacitando-os a propor uma extensão dessas aproximações.

Uma abordagem interessante do método da partição da unidade é nomeada método de interpolação de ponto apresentado por (LIU; GU, 2003). Nesse método é utilizado o caráter local da aproximação para formar subdomínios pela seleção dos pontos mais próximos e em número suficiente para compor uma base polinomial estipulada.

Neste trabalho serão seguidas duas vertentes, a primeira baseada no método de interpolação de ponto e a última voltada para um método mais tradicional, o método de Galerkin sem elementos. Utilizando-se essas vertentes, são obtidos resultados de casos estruturais unidimensionais e bidimensionais, além de efetuado o cálculo do fator de intensidade de tensão para uma chapa em estado plano de tensão.

# 1 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO APLICADAS

## 1.1 Critérios de aproximação clássicos

Neste capítulo serão apresentados critérios de aproximação de funções aplicados aos métodos sem malha. Será introduzido, primeiramente, o método dos mínimos quadrados móveis (MQM) que é a base do método de Galerkin sem elementos apresentado em capítulo vindouro. Além disto, será visto que o método dos mínimos quadrados móveis é um caso particular do método da partição da unidade, comentado ainda neste capítulo. Serão feitas referências, também, aos métodos *smooth particle hydrodynamic* e de interpolação de pontos. O primeiro devido à sua importância histórica e pela procura de entendimentos preliminares dos métodos sem malha, e o segundo por possuir um ponto de vista mais atual.

### 1.1.1 Mínimos quadrados móveis (MQM)

De modo a seguir uma ordem didática e não a cronológica, o método MQM é apresentado primeiramente, pois além de ser uma abordagem clássica dos métodos sem malha, tem todas as nuances necessárias a uma apresentação primária. Então, para se aproximar uma função  $u(x)$  utiliza-se uma base de funções  $\mathbf{p}(x)$  tais como:

$\mathbf{p}^T(x) = [1, x, x^2, \dots, x^n]$  em uma dimensão.

$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, \dots, x^n, xy^{n-1}, y^n]$  em duas dimensões com  $\mathbf{x}^T = [x, y]$ .

Utiliza-se também uma função peso  $w$ , positiva em seu suporte e nula no restante do domínio. Os suportes podem ser circulares ou retangulares e, quando aplicados em métodos sem malha, são coincidentes com os domínios de influência de seus respectivos nós. Assim, considerando-se, primeiramente, funções peso isotrópicas e polares com suporte circular, essas são calculadas em função de uma variável  $S$  de valores pertencentes ao domínio dos números Reais. A variável  $S$  é definida como a divisão entre a distância  $s$  do nó de referência até outro pertencente ao domínio pelo raio do suporte  $s_{máx}$ .  $S$  é dado, portanto, como:

$$S = s/s_{máx}$$

onde  $s = ((x_n - x_{ponto\ avaliado})^2 + (y_n - y_{ponto\ avaliado})^2)^{1/2}$

Três funções são comumente usadas como função peso: as exponenciais, a *spline* cúbica e a *spline* quártica e são apresentadas na tabela a seguir para um  $s_{máx}$  determinado.

**Tabela 1:** Exemplos de funções peso

Função	Peso	Representação	Intervalo
Exponencial:	$w(S)$	$e^{-(S/\alpha)*(S/\alpha)}$	$S \leq 1$
		0	$S > 1$
Spline cúbica:	$w(S)$	$2/3 - 4S^2 + 4S^3$	$S \leq 1/2$
		$4/3 - 4S + 4S^2 - 4/3S^3$	$1/2 < S \leq 1$
		0	$S > 1$
Spline quártica:	$w(S)$	$1 - 6S^2 + 8S^3 - 3S^4$	$S \leq 1$
		0	$S > 1$

A função peso  $w$  de suporte retangular, diferentemente da primeira, tem um raio de suporte e uma função peso para cada direção, sendo a função peso final representada pelo produto:

$$w(d) = w(d_x, d_{mix}) w(d_y, d_{miy})$$

com

$$w(d_x, d_{mix}) = \begin{cases} 1 - (d_{ix}/d_{mix})^2, & \text{se } d_{ix} \leq d_{mix} \\ 0, & \text{se } d_{ix} > d_{mix} \end{cases}$$

$$w(d_y, d_{miy}) = \begin{cases} 1 - (d_{iy}/d_{miy})^2, & \text{se } d_{iy} \leq d_{miy} \\ 0, & \text{se } d_{iy} > d_{miy} \end{cases}$$

tal que  $d_{mix}$  e  $d_{miy}$  representam os raios dos suportes nas direções dos eixos ortogonais e as variáveis  $d_x$  e  $d_y$  são expressas pela equação que se segue:

$$\begin{cases} d_x = d_{ix}/d_{mix} \\ d_y = d_{iy}/d_{miy} \end{cases}$$

A origem do método MQM advém da minimização do resíduo entre a função  $u$  que se deseja aproximar a partir de uma distribuição nodal e a aproximação:

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

Assim, utilizando-se a função peso de suporte circular  $w(S, s_{máx})$  para um determinado  $s_{máx}$ , tem-se que os coeficientes contidos em  $\mathbf{a}$ , expresso pela equação 1.1, serão avaliados com base na derivação da equação a seguir:

$$R = \sum_{i=1}^n w_i(S) (\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_i))^2 \quad (1.2)$$

onde

$$w_i(S) \geq 0 \text{ em } \Omega_i, \text{ onde } S = S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i);$$

$$w_i = 0 \text{ fora de } \Omega_i;$$

$n$  é o número de nós.

Derivando-se a expressão 1.2 em relação a  $\mathbf{a}$  obtém-se:

$$\frac{dR}{d\mathbf{a}} = 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) w_i(S) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) w_i(S) \mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$$

E de modo a se ter o mínimo da função  $R$ , a expressão supracitada deve ser igualada a zero, obtendo-se o seguinte sistema algébrico de equações:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) w_i(S) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) w_i(S) \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \quad (1.3)$$

Na equação 1.3 são destacados e definidos os termos que se seguem

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) w_i(S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) w_i(S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \quad (1.5)$$

Substituindo-se as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  na equação 1.3 chega-se ao sistema algébrico:

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (1.6)$$

Os coeficientes contidos em  $\mathbf{a}$ , solução do sistema algébrico representado pela expressão 1.6, são os valores que minimizam a variável  $R$  expressa pela

equação 1.2 segundo a aproximação dos mínimos quadrados móveis. Logo, chega-se a:

$$u^h = \sum_{I=1}^n \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI} u_I = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) u_I \quad (1.7)$$

onde  $m$  é o número de funções que compõem a base  $\mathbf{p}$  e  $\phi_I(\mathbf{x})$  são as funções de forma da aproximação dos mínimos quadrados móveis definida pela fórmula

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI} \quad (1.8)$$

e as derivadas podem ser obtidas conforme a equação

$$\phi_{I,i} = \sum_{j=1}^m (p_{j,i}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{jI} + p_j(\mathbf{A}_{,i}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,i})_{jI}) \quad (1.9)$$

onde

$$\mathbf{A}_{,i}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,i} \mathbf{A}^{-1}$$

em que o índice após a vírgula indica uma derivada espacial.

Reescrevendo-se as equações 1.4 e 1.5 na forma matricial obtém-se, respectivamente:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{w} \mathbf{P} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{w} \quad (1.11)$$

Então tem-se o sistema:

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{u}$$

Assim, os coeficientes pertencentes ao vetor  $\mathbf{a}$  que satisfazem à aproximação dos mínimos quadrados móveis na forma matricial para cada  $\Omega_i$  são descritos por:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (1.12)$$

onde

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{w}(S) \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{w}(S)$$

As matrizes  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{w}(S)$  são descritas como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & p_3(\mathbf{x}_1) & \cdots \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & p_3(\mathbf{x}_2) & \cdots \\ p_1(\mathbf{x}_3) & p_2(\mathbf{x}_3) & p_3(\mathbf{x}_3) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}(S) = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & w_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & w_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Daí, a aproximação  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  expressa pela equação 1.7 se escreve:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \phi_I u_I = \mathbf{\Phi}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (1.13)$$

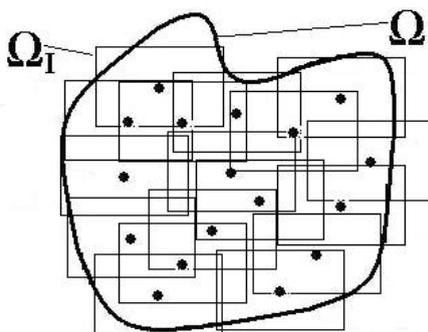
em que

$$\mathbf{\Phi}^T = [\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})] = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (1.14)$$

onde  $\mathbf{\Phi}$  são as funções de forma do MQM.

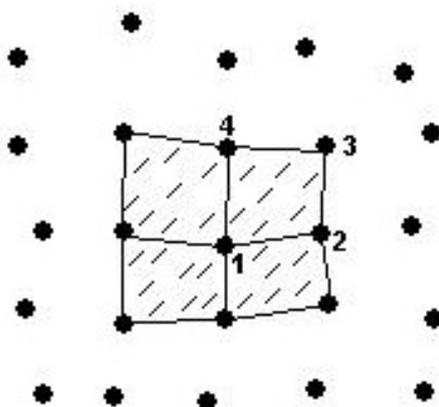
Conforme será visto mais adiante, o critério de aproximação baseado no MQM será aplicado ao método de Galerkin sem elementos, chegando-se a um sistema de equações algébricas em que a matriz dos coeficientes é denominada matriz de rigidez e o vetor dos termos independentes é o vetor força, de modo similar ao método de Galerkin aplicado ao método dos elementos finitos. Em se tratando do cálculo da matriz de rigidez, o cálculo de  $\mathbf{\Phi}$  é feito em cada ponto de Gauss que compõem as células de integração no domínio, acrescentando-se suas contribuições ao componente da matriz correspondente aos nós envolvidos. Esses nós são os de referência (onde a função peso têm valor máximo) e os que são pertencentes aos seus respectivos domínios de influência onde a função peso  $w$  atua e possui valores positivos. O domínio de influência se comporta similarmente a uma nuvem de pontos para cada nó de referência. A figura 3 ilustra os suportes para cada nó avaliado cobrindo os nós pertencentes ao seu domínio de influência agora com suporte retangular.

Vale observar que os coeficientes do vetor  $\mathbf{a}$  são funções de  $\mathbf{x}$ , portanto, um sistema algébrico deve ser resolvido em toda posição que for desejada a aproximação, justificando assim o nome "móvel". Outra característica importante



**Figura 3:** Composição do domínio  $\Omega$  por meio da justaposição dos suportes de cada partícula.

é a de que, caso os componentes da diagonal da matriz peso  $\mathbf{w}$  sejam unitários, o MQM degenera-se no método dos mínimos quadrados tradicional ou, ainda, se ocorrer a coincidência do domínio de influência com o espaçamento nodal ao redor do nó avaliado o MQM degenera-se no MEF. Essa última situação é ilustrada na figura 4.



**Figura 4:** Domínio de influência do nó 1 englobando os espaçamentos nodais adjacentes.

Levando-se em consideração que consistência é a capacidade de reproduzir uma base de funções de determinada ordem, tem-se que, segundo (MENDEZ, 2001), o método MQM é consistente para as funções polinomiais componentes de sua base. Assim, se a base é completa em um polinômio de ordem  $k$ , a consistência evidentemente é extensiva a suas derivadas, mesmo no contorno do domínio. Então, se a base  $p_i(\mathbf{x})$  inclui os monômios lineares e constantes, a consistência linear é satisfeita. De acordo com (FLEMING et al., 1996), esta reprodução vale para qualquer função componente de sua base, sendo todas representadas exatamente pelo método. Caso se inclua funções com características específicas de um problema na base de funções do método de aproximação MQM, essa também poderá ser reproduzida. Esse tipo de acréscimo de

funções com características específicas na base do MQM é denominado introdução de base intrínseca. Em contrário, nomeia-se de base extrínseca. Essa formulação atinente à introdução de funções de base representativas do assunto em estudo será comentada mais adiante.

A principal deficiência da metodologia de aproximação MQM é o fato dessa não gerar uma função de interpolação, pois suas funções de forma não satisfazem a propriedade da função delta de Kronecker, ou seja,  $\phi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$ . Assim, para essa aproximação, as condições essenciais ou condições de contorno de Dirichlet não podem ser aplicadas diretamente. De modo a contornar essa dificuldade, existem as seguintes estratégias que tornam possível a imposição dessas condições de contorno:

a. Utilização de multiplicadores de Lagrange

Essa estratégia aplica-se à forma fraca da equação linear de elasticidade. É a de maior precisão, mas tem a desvantagem de gerar matrizes muito grandes, além de esparsas e sem uma banda demarcada (BELYTSCHKO; LU; GU, 1994).

b. Utilização de funções penalidade

Essa é a estratégia mais usada, pois apresenta grande precisão. Sua desvantagem se deve à exigência de testes numéricos para avaliar a penalização necessária.

c. Acoplamento com MEF

Utiliza a característica de que a aproximação MQM equivale ao método dos elementos finitos convencional quando o domínio de influência é de apenas um elemento (LACROIX; BOUILLARD, 2003).

d. Aplicação de funções de peso singulares

São aplicadas funções peso singulares para aquisição das propriedades da função delta de Kronecker, modificando as originais funções de aproximação.

### 1.1.2 Smooth particle hydrodynamic (SPH)

Este método é baseado na idéia da função delta de Dirac que aproxima uma determinada função  $u$  por meio da equação:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^p(\mathbf{x}) = \int w(S(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), s_{máx}) u(\mathbf{x}^*) d\Omega_{\mathbf{x}^*} \quad (1.15)$$

onde

- .  $u(\mathbf{x})$  é a função a ser avaliada;
- .  $u^\rho(\mathbf{x})$  é a aproximação da função;
- .  $w$  é a função peso;
- .  $s_{máx}$  é chamado de medida do suporte.

O suporte  $s_{máx}$  define a região a partir do ponto  $\mathbf{x}$  considerado onde a função peso atua. É interessante notar que a integração é realizada utilizando-se a variável  $\mathbf{x}^*$  associada a um conjunto de pontos ao redor do ponto de referência  $\mathbf{x}$  e que, em modelagem de fenômeno astrofísico,  $u$  pode ser utilizado para representar a massa específica de uma estrela. Em virtude da idéia primária, a medida que  $s_{máx}$  tende para zero,  $w(S(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), s_{máx})$  tende para a função delta de Dirac, valendo a igualdade:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^\rho(\mathbf{x}) = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) u(\mathbf{x}^*) d\Omega_{\mathbf{x}^*}$$

De acordo com (MONAGHAN, 1982), é necessário que o peso  $w$  satisfaça às seguintes condições:

- a.  $w(S(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), s_{máx}) > 0$  sobre um subdomínio  $\Omega_I$ ;
- b.  $w(S(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), s_{máx}) = 0$  fora do subdomínio  $\Omega_I$ ;
- c. a propriedade de normalização:  $\int_{\Omega} w(S(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), s_{máx}) d\Omega = 1$ ;
- d.  $w(S(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), s_{máx})$  é uma função monótona decrescente e  $s = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$ ;
- e.  $w(S(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), s_{máx}) \rightarrow$  delta de Dirac se  $s_{máx} \rightarrow 0$ .

A segunda condição é a que capacita a aproximação ser gerada a partir de uma representação local, isto é,  $u^\rho(\mathbf{x})$  vai depender apenas dos valores de  $u$  nos nós que estão no domínio de influência para o qual  $w(S(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), s_{máx})$  é não nulo. A terceira condição surge a partir da consistência, embora ela não garanta a consistência da forma discreta da aproximação. (MONAGHAN, 1982) notou que a aproximação  $u^\rho(\mathbf{x})$  pode ser vista como a base de um procedimento de interpolação. Para descrição na forma discreta da aproximação SPH em uma dimensão, a quadratura pode ser obtida por meio da regra do trapézio:

$$u(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}^\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w(S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), s_{máx}) u(\mathbf{x}_i) \Delta \mathbf{x}_i \quad (1.16)$$

onde  $\Delta \mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1})/2$  para um conjunto de nós numerados sequencialmente.

Compondo a equação 1.16 com base nas funções de forma:

$$u^\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}_i) \quad (1.17)$$

$$\phi_i = w(S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), s_{máx}) \Delta \mathbf{x}_i \quad (1.18)$$

Note que, usualmente,  $u^\rho(\mathbf{x}_i) \neq u(\mathbf{x}_i)$ , portanto, ao se aplicar o método SPH os parâmetros  $u^\rho(\mathbf{x}_i)$  não podem ser tratados exatamente como valores nodais, não satisfazendo a propriedade da função delta de Kronecker. Assim como no MQM, devem ser usadas estratégias especiais para impor as condições de contorno de Dirichlet.

### 1.1.3 Partição da unidade (PU)

Os métodos sem malha podem ser baseados também nas partições da unidade. Segundo (FLEMING et al., 1996), esta abordagem foi desenvolvida por (BABUSKA; MELENK, 1995) e (DUARTE; ODEN, 1996). A partição da unidade descreve que um domínio é coberto por uma sobreposição de subdomínios  $\Omega_I$ , em que cada um é associado a uma função  $\phi_I$  e tem a seguinte propriedade:

$$\sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) = 1 \text{ em } \Omega$$

Lembrando-se da característica do método MQM de reproduzir com exatidão qualquer polinômio de ordem menor ou igual à da sua base polinomial utilizada, conclui-se que essa regra vale para a um polinômio de ordem zero. Assim, funções MQM de ordem zero,  $\zeta^0(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) / \sum_I^n w_I(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ , conhecidas como funções de Shepard, e funções MQM de ordem  $k$ ,  $\zeta^k(\mathbf{x})$ , para qualquer  $k$ , são partições da unidade pois geram funções até ordem  $k$  inclusive a de ordem 0. Além do MQM, vários outros métodos podem ser reconhecidos como casos particulares do método da partição da unidade, tais como o método SPH e o dos elementos finitos com funções de forma Lagrangeana.

A idéia básica nos métodos da partição da unidade é usar funções de forma oriundas do MQM para combinar com funções contendo informações das características do problema estudado. Por exemplo, para o caso de análise de trinca, na região ou domínios de influência onde essa se encontra, é efetuado o enriquecimento pela incorporação de funções que fazem parte da solução

analítica do problema, multiplicando-as pelas funções MQM originais.

O método dos elementos finitos generalizados com funções Lagrangeanas também é um caso particular da partição da unidade. Esse método tem como vantagem ser igual ao método dos elementos finitos em diversos aspectos, como, por exemplo, a utilização da malha de distribuição nodal idêntica à de integração, além do processo de integração numérica. Nesse método, realiza-se o enriquecimento dos nós próximos à região de singularidade com uma base de funções que contém informações do problema. Por ser semelhante ao MEF, o método dos elementos finitos generalizados permite aplicar as condições de contorno de Dirichlet diretamente, desde que essas não coincidam com a região enriquecida. Quanto à construção das funções de forma, essa se diferencia apenas na região enriquecida pela inclusão da nova base de funções. A desvantagem do método está na necessidade de um pré-conhecimento do fenômeno físico para a sua aplicação, ou seja, de saber qual base de funções representa o fenômeno devidamente.

De acordo com (FLEMING et al., 1996), os primeiros a usarem essa nova técnica foram (BABUSKA; MELENK, 1995) que desenvolveram um método nomeado como método do elemento finito de partição da unidade ou método dos elementos finitos generalizados. Para a equação de Helmholtz em uma dimensão introduziram uma aproximação sob a forma:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m \zeta_i^0(x) (a_{0i} + a_{1i}x + \dots + a_{ki}x^k + b_{1i}\sinh(nx) + b_{2i}\cosh(nx)) \quad (1.19)$$

Na expressão 1.19,  $\zeta_i^0(x)$  representa as funções de Shepard e os coeficientes  $a_{0i}, a_{1i}, \dots, a_{ki}, b_{1i}, b_{2i}$  são as incógnitas da aproximação cujos valores podem ser determinados pelo método de Galerkin. O grau de consistência depende do número de termos  $x^k$ , sendo que para consistência linear em uma dimensão, duas incógnitas são necessárias para cada nó. As funções  $\cosh(nx)$  e  $\sinh(nx)$  são funções de enriquecimento de base utilizadas para melhorar a acurácia em relação ao uso da equação de Helmholtz, nesse caso em particular. Se estivesse em análise outro problema, uma base diferente deveria ser aplicada.

(BABUSKA; MELENK, 1995) introduziram, ainda, outra aproximação interessante por satisfazer a condição do Delta de Kronecker. Essa aproximação é representada pela equação:

$$u^h(x) = \sum_J \zeta_J^0(x) \sum_I b_I L_{JI}(x) = \sum_I \sum_{J: x_I \in \Omega_J} \zeta_J^0(x) L_{JI}(x) b_I \quad (1.20)$$

onde  $L_{JI}(x)$  são funções de interpolação de Lagrange em que  $I$  denota a componente da função de interpolação no domínio de influência  $J$ . Daí, para o ponto nodal  $H$  interpolante da função de Lagrange  $L_{JI}(x)$  no subdomínio  $J$ , vale a igualdade  $L_{JI}(x_H) = \delta_{IH}$ , fazendo com que a função  $\phi$  do método do elemento finito da partição da unidade atenda à condição delta de Kronecker,  $\phi_J(x_I) = \delta_{JI}$ .

Assim, no domínio de influência  $\Omega_J$  com  $p + 1$  pontos de interpolação de Lagrange, um polinômio  $L_{JI}$  de grau  $p$  é constituído e  $\phi_I(x)$  equivale a  $\delta_{IH}$  nos pontos  $x_H$ . Então, tem-se a função de forma em destaque:

$$\phi_I(x) = \sum_{J:x_I \in \Omega_J} \zeta_J^0(x) L_{JI}(x) \quad (1.21)$$

Aplicando na função de forma pertencente a equação anterior a propriedade  $L_{JI}(x_H) = \delta_{IH}$  e a condição da partição da unidade para a função  $\zeta^0$ , tem-se:

$$\phi_I(x_H) = \sum_{J:x_I \in \Omega_J} \zeta_J^0(x_H) L_{JI}(x_H) = \sum_{J:x_I \in \Omega_J} \zeta_J^0(x_H) \delta_{IH} = \delta_{IH}$$

Em uma evolução a partir do que foi apresentado por (BABUSKA; MELENK, 1995), (DUARTE; ODEN, 1996) usaram o conceito da partição da unidade de um modo mais geral construindo as funções de forma a partir de uma função MQM de ordem  $k$ . Essa aproximação é conhecida como nuvens HP. A metodologia tem a capacidade de reproduzir polinômios de ordem  $k$ , baseando-se na contribuição de duas bases polinomiais linearmente independentes e diferentes entre si,  $N_i(x)$  e  $N_i(x)q_{iI}(x)$ , conforme indicado na equação:

$$u(x) \approx u^p(x) = \sum_{i=1}^m N_i(x) u_i + \sum_{i=1}^m \sum_{I=1}^{n_i} b_{iI} N_i(x) q_{iI}(x) \quad (1.22)$$

onde

- .  $N_i(x)$  são as funções de interpolação MQM, usualmente de primeira ordem;
- .  $q_{iI}(x)$  são  $n_i$  polinômios de ordem maior que  $k$ . Os polinômios podem ser diferentes em cada nó;
- .  $u_i, b_{iI}$  são coeficientes a determinar.

A maior vantagem da formulação de (DUARTE; ODEN, 1996) é a capacidade da base extrínseca de variar de nó para nó, facilitando então, a adaptatividade. Nas aproximações MQM, como a base é intrínseca, não se pode variar sua forma sem a introdução de discontinuidades.

A referência (LIU; GU, 2003) apresenta uma proposta alternativa de aproximação de funções denominada método de interpolação de ponto descrita a seguir.

#### 1.1.4 Método de interpolação de ponto (MIP)

O método de interpolação de ponto é um método sem malha que tem com principal vantagem a simplicidade na aplicação das condições de contorno de Dirichlet. A busca por essa característica adveio da necessidade de superar a dificuldade da aplicação dessas condições de contorno quando utilizado o método dos mínimos quadrados móveis. Assim como o MQM, o MIP é usado nos métodos sem malha para construir funções de forma para a forma fraca de Galerkin, sendo, no entanto, interpolante. Por essa razão, o MIP permite a aplicação direta das condições essenciais de contorno. Além dessa importante característica, esse método tem a vantagem de ter seu processo de integração numérica facilitado pelo uso de polinômios na composição da função de forma.

Seja uma função de aproximação  $u$  definida em um domínio  $\Omega$  discretizado por um conjunto de nós. A interpolação pontual  $u$  é efetuada a partir dos nós vizinhos e é descrita usando uma base polinomial do seguinte modo:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{x}) a_i = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} \quad (1.23)$$

onde

- .  $a_i$  são os coeficientes interpolantes;
- .  $\mathbf{p}^T(x)$  é um conjunto de funções que, para o caso unidimensional, é dado por
 
$$\mathbf{p}^T(x) = (1, x, x^2, \dots, x^n);$$
- . e  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ , para um caso bidimensional, é expresso por
 
$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, \dots, x^n, xy^{n-1}, y^n) \text{ com } \mathbf{x} = [x, y]^T.$$

Os coeficientes podem ser determinados pela aplicação dessa equação a  $n$  pontos sob o domínio de influência de  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{cases} u_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 + a_4 x_1 y_1 + \dots \\ u_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 + a_4 x_2 y_2 + \dots \\ \dots = \dots + \dots + \dots + \dots + \dots \\ u_n = a_1 + a_2 x_n + a_3 y_n + a_4 x_n y_n + \dots \end{cases}$$

Trabalhando-se na forma matricial:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{P}_0 \mathbf{a} \quad (1.24)$$

onde  $\mathbf{P}_0$  é chamada de matriz momento

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & \cdots \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & \cdots \end{bmatrix}$$

Então, tem-se a determinação dos coeficientes  $\mathbf{a}$  pela equação:

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_0^{-1} \mathbf{u}_e \quad (1.25)$$

Nesse ponto, é interessante notar outra importante diferença entre o MQM e o MIP, os coeficientes  $\mathbf{a}$  do último são constantes na medida que  $\mathbf{P}_0^{-1}$  também o é. Já os coeficientes do vetor  $\mathbf{a}$  do MQM são funções, na medida em que seus componentes também os são. Um comparativo é apresentado na tabela abaixo:

**Tabela 2:** Comparativo entre os coeficientes avaliados pelo MIP e MQM.

<i>MIP</i>	<i>MQM</i>
$\mathbf{a} = \mathbf{P}_0^{-1} \mathbf{u}_e$	$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_e$

Substituindo-se  $\mathbf{a}$  na equação 1.23, tem-se a função de forma do método de interpolação de ponto definida de acordo com o desenvolvimento:

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}_0^{-1} \mathbf{u}_e = \mathbf{\emptyset}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_e$$

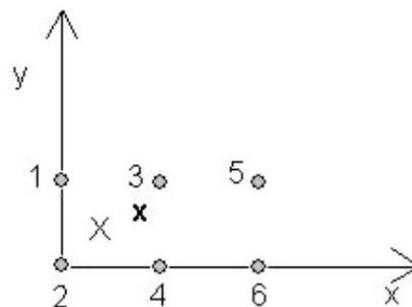
$$\mathbf{\emptyset}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}_0^{-1} \quad (1.26)$$

A principal desvantagem desse procedimento jaz na necessidade de inversão da matriz momento, o que pode, por vezes, apresentar problemas de singularidade devido à escolha de nós inadequados. Para evitar a singularidade, um algoritmo triangulação de matrizes é adaptado de maneira a decidir quais monômios ou nós devem ser excluídos de modo a garantir a inversão.

A singularidade da matriz  $\mathbf{P}_0$  ocorre quando o número de valores distintos de posição dos nós não é suficiente para avaliar os coeficientes de interpolação em  $x$  ou  $y$  para uma base completa de uma ordem específica de monômios

componentes do Triângulo de Pascal. Esse fato é comum para uma distribuição regular de nós. Por exemplo, para a distribuição de nós mostrada na figura 5 e fazendo-se uso do polinômio completo de segunda ordem, ocorre um número insuficiente de valores de ordenadas (dois) para um número excessivo (três) de coeficientes de interpolação em  $y$  a ser determinado.

Observe que se o monômio  $y^2$  fosse trocado por  $x^2y$  na base o problema da singularidade seria eliminado. Portanto, a programação do método de interpolação de ponto deve ser capaz de decidir quais nós e monômios devem fazer parte da base e, para tanto, é utilizado o algoritmo de triangulação de matrizes.



**Figura 5:** Distribuição regular de seis nós.

Assim, de modo a evitar a singularidade da matriz momento  $\mathbf{P}_0$ , é efetuada uma sequência de operações dentro de cada domínio de influência visando eliminar nós e monômios que sejam responsáveis por essa singularidade. Essas operações têm as etapas de:

- normalizar distâncias a contar do ponto de referência  $x$ ;
- montar a matriz momento  $\mathbf{P}_0$  (com as coordenadas dos nós mais próximos na parte superior);
- avaliar o posto  $r$  de  $\mathbf{P}_0$  pela metodologia da eliminação de Gauss fazendo-se uso do menor elemento da linha das matrizes  $\mathbf{P}_0$  e  $\mathbf{P}_0^T$  como pivô;
- descartar os  $(n - r)$  nós mais distantes e os  $(n - r)$  monômios de mais alta ordem da base.

Uma maneira de burlar o inconveniente da singularidade da matriz  $\mathbf{P}_0$  é operar com uma distribuição randômica de nós, o que praticamente impossibilita a coincidência de coordenadas  $x$  e  $y$  para os nós do domínio, perdendo-se, contudo, a regularidade dos nós.

## 2 MECÂNICA DA FRATURA

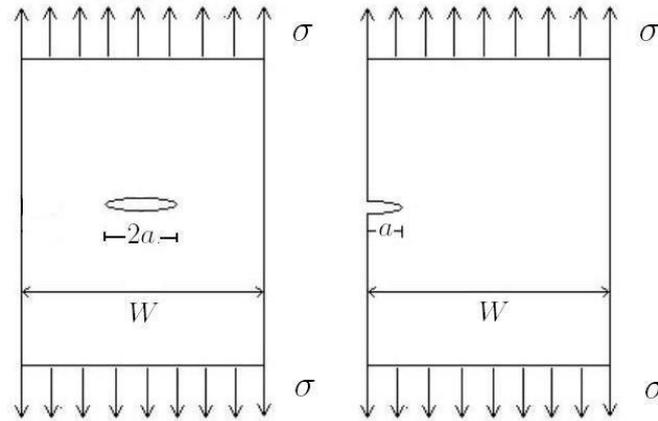
### 2.1 Considerações iniciais

Com a Revolução Industrial a humanidade experimentou um aumento substancial no uso de metais em aplicações estruturais. Infelizmente o número de acidentes acompanhou esse aumento, por vezes com vítimas. É evidente que muitos desses acidentes foram motivados por projetos mal implementados, mas outros muitos estavam associados ao desconhecimento que se vivia no que tange à Mecânica da Fratura. Nos dias de hoje avanços nesse campo proporcionaram descobrir ligações entre esses acidentes com fraturas frágeis associadas a rasgos e cantos vivos, além de uma série de outros fatores que diminuem a resistência à fratura. Fatores ambientais, como temperaturas baixas, podem gerar a mudança no mecanismo de fratura que passa de "*dimpled rupture*" (em que ocorre à junção de microvazios e a indução de plasticidade) para "*clevage*" (em que não há plasticidade e sim a ruptura abrupta no plano cristalográfico). Fatores induzidos pelo homem como, por exemplo, processos de forjamento, extrusão e laminação, também podem facilitar a ocorrência de fraturas devido à alongação dos vazios existentes e pela geração de inclusões de origem não metálicas.

Neste trabalho serão abordados assuntos relacionados à Mecânica da Fratura Elástica Linear em estado de tensão plana, preocupando-se com defeitos de caráter macro como trincas. Esses tipos de falhas são denominadas de fratura dominante, enquanto as demais são chamadas escoamento dominante, abordando-se defeitos de caráter micro relacionados à resistência à plasticidade (interstícios, contornos de grãos, redes de deslocamentos etc.).

### 2.2 Histórico

Em 1920 Griffith expõe sua teoria de que a trinca se propaga somente se o sistema estrutural tender para uma condição de menor energia. A teoria inicialmente restrita a materiais frágeis introduzia o conceito de energia de superfície, afirmando que o decréscimo na energia de deformação elástica durante a propagação da trinca era compensado pela energia necessária para criar uma nova superfície. Essa foi a primeira vez que se assumiu a existência de um equilíbrio de energia associado à propagação da trinca em um corpo sob tensão. A teoria permitiu estimar a resistência teórica de sólidos frágeis e também de relacionar a resistência à fratura às dimensões do defeito. Então, para uma chapa de trinca central de comprimento  $2a$  tracionada em suas extremidades por uma tensão constante  $\sigma$ , conforme indicado na parte esquerda da figura 6, tem-se:



**Figura 6:** Chapas com trinca central e com trinca de aresta.

$$U = U_o + U_a + U_\gamma - F_E \quad (2.1)$$

onde

- .  $U$  - energia total;
- .  $U_o$  - energia elástica da placa sem trinca;
- .  $U_a$  - mudança de energia elástica causada pela introdução da trinca;
- .  $U_\gamma$  - mudança de energia de superfície elástica gerada pela formação da superfície da trinca;
- .  $F_E$  - trabalho das forças externas.

e tal que

$$U_a = -(\pi\sigma^2 a^2)/E \quad (2.2)$$

$$U_\gamma = 2(2a\gamma_e) \quad (2.3)$$

$$F_E = 0 \quad (2.4)$$

onde  $\gamma_e$  é a densidade de energia de superfície vinculada à deformação elástica por unidade de comprimento e  $E$  representa o módulo de Young.

Substituindo-se os resultados descritos nas expressões 2.2, 2.3 e 2.4 na expressão 2.1, tem-se que a energia total é descrita sob a forma:

$$U = U_o - (\pi\sigma^2 a^2)/E + 4a\gamma_e \quad (2.5)$$

Derivando-se a energia representada pela expressão 2.5 em relação a "a" e igualando-a a zero, encontra-se o ponto de equilíbrio:

$$- 2\pi\sigma^2 a/E + 4\gamma_e = 0 \quad (2.6)$$

Reescrevendo-se a expressão 2.6, tem-se uma relação entre a tensão  $\sigma$  e o comprimento "a" que se associa a uma constante do material:

$$\sigma a^{1/2} = (2E\gamma_e/\pi)^{1/2} = \text{cte do material} \quad (2.7)$$

A equação desenvolvida por Griffith indica que o comprimento da trinca está associado à tensão aplicada em um ponto remoto.

Em 1950 Irwin incluiu no equilíbrio de energia o trabalho de deformação plástica, reconhecendo que para materiais dúcteis a energia requerida para formar uma nova superfície é geralmente insignificante comparada ao trabalho necessário para se deformar plasticamente. O trabalho plástico, portanto, é a maior contribuição à resistência à propagação da trinca para esses materiais. Outra contribuição de Irwin foi a definição da propriedade material  $J$  como a energia total liberada durante a formação da trinca por unidade de comprimento e de espessura, além de associar essa taxa de energia  $J$  a um fator de intensidade de tensão  $K$ . Esse fator representa a amplificação da magnitude do campo de tensão elástica e, segundo Irwin, a fratura ocorre quando o fator de intensidade de tensão crítico é atingido à frente da ponta da trinca. Então, atingir um fator de intensidade de tensão crítico  $K_c$  que está associado à tensão próxima à ponta da trinca é equivalente a atingir uma energia total liberada crítica  $J_c$ , associada a um equilíbrio de energia da teoria de Griffith-Irwin. Nesse ponto a resistência à propagação da trinca é atingida e essa começa a se propagar. Assim:

$$\pi\sigma^2 a/E = 2(\gamma_e + \gamma_p) = J \quad (2.8)$$

onde

- .  $J$  - energia total liberada durante a formação da trinca por unidade de comprimento e de espessura;
- .  $\gamma_p$  - densidade de energia de superfície vinculada à deformação plástica por unidade de comprimento.

A tensão  $\sigma$  de tração na placa quando se atinge a energia total liberada crítica  $J_c$ , é a tensão  $\sigma_c$ , implicando em:

$$\pi\sigma_c^2 a/E = J_c \quad (2.9)$$

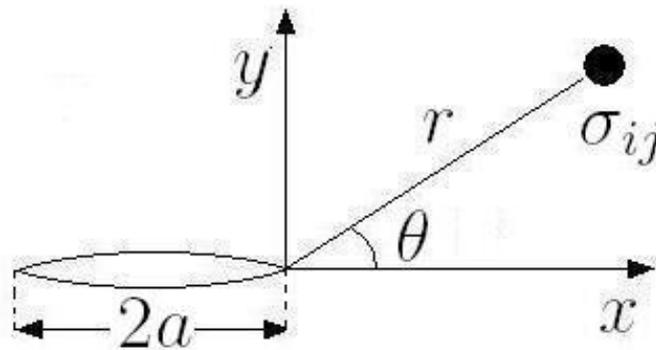
O campo de tensão na vizinhança da ponta trinca e conforme indicado nos eixos referenciados na figura 7 tem a forma:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma(\pi a)^{1/2}/(2\pi r)^{1/2} \cos(\theta/2)(1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)) \\ \sigma_{yy} = \sigma(\pi a)^{1/2}/(2\pi r)^{1/2} \cos(\theta/2)(1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)) \\ \sigma_{xy} = \sigma(\pi a)^{1/2}/(2\pi r)^{1/2} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) \end{cases} \quad (2.10)$$

onde

$$K = \sigma(\pi a)^{1/2} \quad (2.11)$$

$K$  representa a magnitude do campo de tensão que pode ser entendido como um fator intensificador da tensão média na placa que age localmente na ponta da trinca. Essa intensificação local da tensão pode causar o colapso do material.

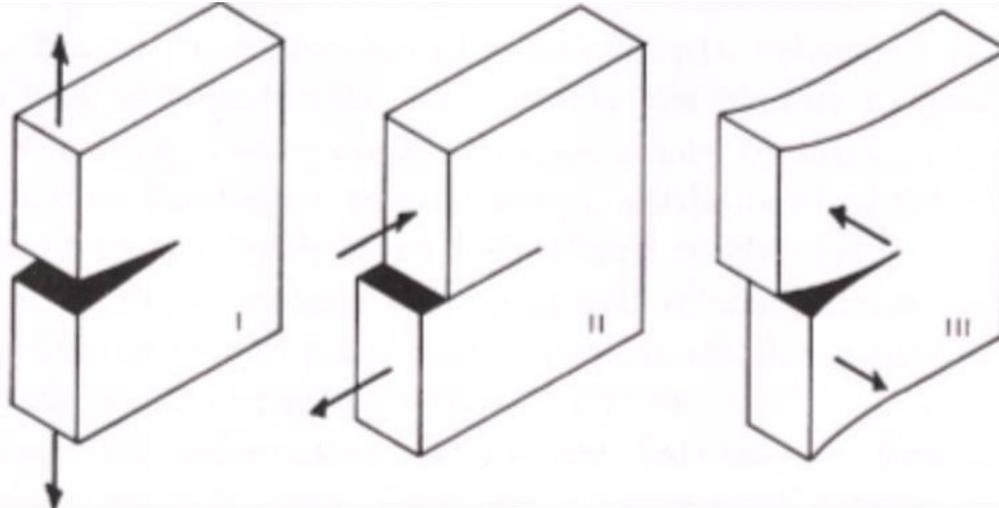


**Figura 7:** Tensão no referencial da trinca.

Combinando-se as expressões 2.9 e 2.11 tem-se, para condição crítica, a relação entre  $K_c$  e  $J_c$ . Essa relação é válida para o estado plano de tensão:

$$J_c = K_c^2/E \quad (2.12)$$

Deve-se acrescentar que esse não é o único modo de sollicitar o material, existindo mais outros dois, conforme pode ser visto nos dois últimos exemplos indicados na figura 8. O modo tratado até aqui é o chamado modo-I ou modo de abertura e os demais são modo-II e modo-III, denominados de cisalhante no plano e cisalhante fora do plano, respectivamente. Isto posto, deve-se considerar o fator de intensidade de tensão  $K$  para os três modos:  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ .



**Figura 8:** Modos de fratura. Figura retirada de (BROEK, 1982)

De maneira geral os carregamentos não ocorrem com os modos isolados, nem tão pouco o posicionamento da trinca é sempre adequado para separação direta dos mesmos. Para se avaliar uma situação abrangente deve-se considerar que os modos de fratura interagem simultaneamente, havendo dependência entre eles, fazendo com que a trinca mude de direção a todo instante.

No início da década de sessenta Wells notou que as medidas de  $K_{Ic}$  para aços estruturais não eram adequadas para materiais muito resistentes, e publicou um trabalho sobre a abertura de ponta de trinca e ocorrências de deformações plásticas nesta extremidade. Nesse trabalho Wells observou que as faces da trinca se afastavam durante sua propagação, e que o grau de escoamento aumentava na ponta na medida em que a resistência do material crescia, percebendo que deformação plástica nessa região é o que regula o processo de fratura. Assim, seus trabalhos foram mais devotados à Mecânica da Fratura Elasto-Plástica e tiveram um lento avanço em virtude da complexidade da questão. Wells inovou também ao mostrar que a abertura de ponta de trinca possibilita descrever as condições na ponta da trinca e pode ser usada como critério de fratura, por estar relacionada ao fator de intensidade de tensão. Essa relação, baseada na teoria da zona plástica circular na ponta da trinca, é expressa por:

$$\delta = \frac{4K_I^2}{\pi\sigma_{YS}E} \quad (2.13)$$

onde  $\sigma_{YS}$  representa a tensão de escoamento.

Utilizando-se a relação entre o fator de intensidade de tensão e a taxa de energia liberada  $J$  dada pela expressão 2.12 na expressão 2.13, tem-se a relação

entre a abertura de ponta de trinca e a taxa de liberação de energia  $J$ :

$$\delta = \frac{4J}{\pi\sigma_{YS}} \quad (2.14)$$

Os valores de  $K_I$  variam em função do posicionamento da trinca na placa. Assim, seus valores podem ser calculados pela equação  $C\sigma(\pi a)^{\frac{1}{2}}$ , onde  $C$  é apresentado na tabela abaixo para as configurações de trinca central e de aresta.

**Tabela 3:** Valores de  $C$  para cálculo de  $K_I$  em função do tipo de trinca.

Tipo de Trinca	Cálculo de C
Trinca Central	$C = 1 + 0,256(a/W) + 1,152(a/W)^2 + 12,200(a/W)^3$ para trincas com $a/W \leq 0,35$ ou
	$C = (\sec(\pi a/W))^{\frac{1}{2}}$ ou
	$C = 1/(1 - (2a/W)^2)^{\frac{1}{2}}$
Trinca de Aresta	$C = 1,12$ para trincas pequenas ou
	$C = 1,12 - 0,231(a/W) + 10,55(a/W)^2 - 21,72(a/W)^3 + 30,39(a/W)^4$ para trincas com $a/W \leq 0,6$

### 2.3 Integral de contorno

A integral  $J$  pode ser avaliada numericamente ao longo de um contorno ao redor da ponta da trinca. Esse cálculo é efetuado para casos lineares e não lineares, sendo que, para problemas elásticos, seu resultado independe do contorno ou caminho percorrido. Isto capacita o usuário a avaliar  $J$  em um contorno remoto.

Antes de introduzir a avaliação da integral  $J$ , de modo a entender as variáveis atuantes no processo, será apresentado o método precursor no cálculo da energia liberada durante a propagação de trinca, chamado de formulação da derivada da rigidez baseada no método da extensão da trinca virtual. O desenvolvimento dessa e de outras formulações apresentadas nesse capítulo tiveram como referência (ANDERSON, 1991).

### 2.3.1 Extensão da trinca virtual: formulação da derivada da rigidez

Em relação à propagação de trincas existem duas abordagens distintas: a do carregamento fixo e a do deslocamento fixo.

Para a abordagem de carga fixa, considerando-se um corpo trincado de duas dimensões, com espessura unitária e sujeito ao modo-I de carregamento, a energia potencial elástica do corpo é dada pelo seguinte funcional:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (2.15)$$

Na condição de carregamento fixo  $J$  é assim desenvolvido:

$$J = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = -\frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial a} (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F}) - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial a} \quad (2.16)$$

Pode ser observado que o primeiro termo da expressão 2.16 é nulo em virtude de representar a condição de equilíbrio estático, e na ausência de tração nas faces da trinca e desde que o carregamento seja fixo, o último termo também deve ser nulo, resultando em:

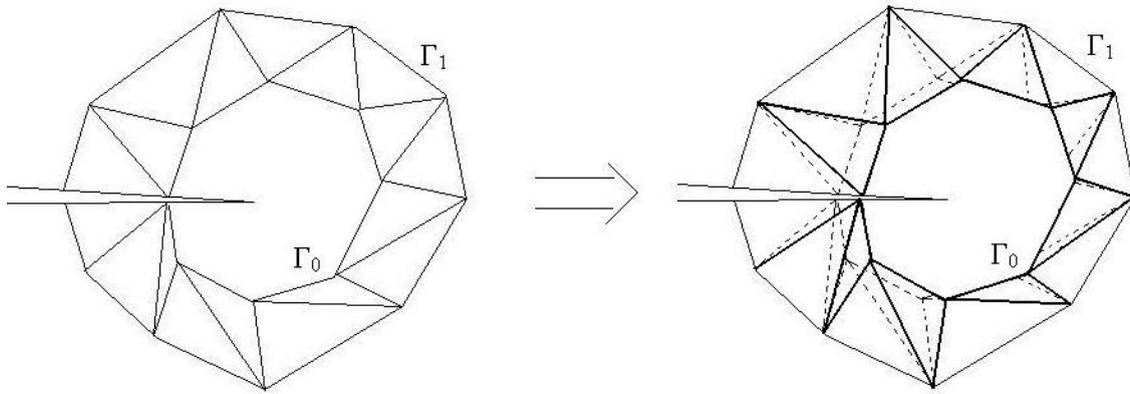
$$J = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} \mathbf{u} \quad (2.17)$$

Essa equação indica que a taxa de liberação de energia está relacionada à derivada da matriz de rigidez em relação ao comprimento da trinca. Considerando-se que para o cálculo dessa derivação seja aplicado o método dos elementos finitos, para cada incremento da trinca  $\Delta a$  será necessário a confecção de um ajuste dos elementos ao redor de sua ponta limitados externamente por um domínio  $\Gamma_1$  e internamente por um domínio  $\Gamma_0$ , conservando fixa o restante da malha como mostra a figura 9. Assim, os elementos distorcidos da região da ponta da trinca são associados com a variação da rigidez e a integral  $J$  pode ser avaliada como:

$$J = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial a} \mathbf{u} \quad (2.18)$$

onde  $N_c$  é o número de elementos entre  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ , já que somente nessa região houve modificações na matriz de rigidez.

Essa técnica é baseada no processo de derivação que notoriamente não é tão preciso numericamente quanto os processos de integração. As técnicas a seguir baseiam-se em integrais sendo, portanto, mais precisas.



**Figura 9:** Aumento da trinca gerando distorção nos elementos.

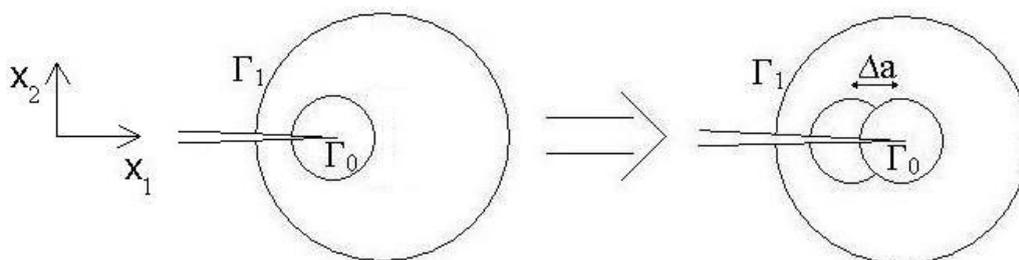
### 2.3.2 Extensão da trinca virtual: abordagem em meio contínuo

Essa metodologia é um aperfeiçoamento da anterior e tem as vantagens de não requer derivação numérica, além de não ser restrita ao MEF. No modelo representado na figura 10 a trinca cresce na direção  $x_1$  e são desconsideradas forças de tração em suas faces. A metodologia baseia-se no cálculo da integral  $J$ :

$$J = \frac{1}{\Delta a} \int_A (\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{i1}) \frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_i} dA \quad (2.19)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e considera-se

- . a translação de corpo rígido associada ao deslocamento  $\Delta a$  na direção  $x_1$  dos pontos dentro do domínio interno  $\Gamma_0$ ;
- . a translação  $\Delta x_1$  dos pontos entre os domínios interno e externo;
- . o deslocamento nulo dos pontos de fora do domínio externo  $\Gamma_1$ .



**Figura 10:** Extensão da trinca virtual em duas dimensões.

Deve ser observado que  $\frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_i}$  é nulo fora de  $\Gamma_1$  e dentro de  $\Gamma_0$ , efetuando-se os cálculos apenas entre ambos.

A implementação numérica dessa metodologia é baseada em um deslocamento virtual dos nós dentro destes domínios específicos, sendo muito similar ao da integral de domínio que será vista a seguir.

### 2.3.3 Integral de domínio de energia

Esta metodologia é a base para a análise numérica da integral  $J$ , sendo aplicada em casos quase-estáticos ou dinâmicos, com materiais elásticos, plásticos ou viscoelásticos.

A definição geral da integral  $J$  requer que o contorno ao redor da ponta da trinca seja pequeno, sendo:

$$J = \lim_{\Gamma_0 \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} [(w + T)\delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1}] n_i d\Gamma \quad (2.20)$$

onde:

- .  $T$  - densidade de energia cinética;
- .  $w$  - densidade de energia de deformação sendo representada pela expressão  $w = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$

A integral no domínio  $\Gamma_0$  é o caso geral e o domínio  $\Gamma_1$  restringe o cálculo para materiais elásticos lineares ou não, sob condições quase-estáticas e, dessa forma  $T$  é nulo.

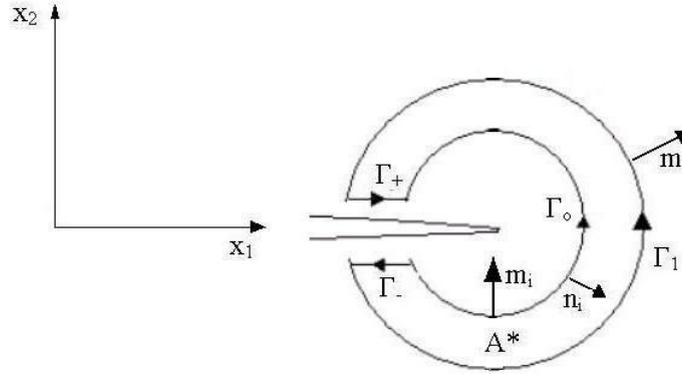
A expressão 2.20 não é adequada para o cálculo da integral  $J$  pois o contorno de integração é muito pequeno, sendo necessário outro domínio fechado  $\Gamma^*$  representado na figura 11 e dado por:

$$\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_+ + \Gamma_- - \Gamma_0 \quad (2.21)$$

Esse contorno, assim como  $\Gamma_1$ , é válido para materiais elásticos, lineares ou não e em condições quase estáticas. Será introduzida também a função  $q$ , com valor unitário em  $\Gamma_0$  e nulo em  $\Gamma_1$ . Substituindo-se  $\Gamma_0$  da expressão 2.21 na expressão 2.20 tem-se:

$$J = \int_{\Gamma^*} [\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w\delta_{1i}] q m_i d\Gamma - \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} [\sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1}] q d\Gamma \quad (2.22)$$

onde a segunda integral é eliminada pela ausência de tração nas faces da trinca, e o termo referente a  $\Gamma_1$  é multiplicado por um  $q$  nulo.



**Figura 11:** Contornos que formam o contorno fechado ao redor da ponta da trinca.

Aplicando-se o teorema da divergência à expressão 2.22 tem-se:

$$J = \int_{A^*} \frac{\partial}{\partial x_i} ([\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i}] q) dA$$

então

$$J = \int_{A^*} [\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i}] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA + \int_{A^*} [\frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1}) - \frac{\partial w}{\partial x_1}] q dA \quad (2.23)$$

Quando não há forças de massa e  $w$  exhibe propriedades potenciais elásticas, tem-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon_{ij}}$$

Para as condições de equilíbrio quase-estático a segunda integral da expressão 2.23 é nula, pois esta é oriunda da equação de equilíbrio elástico, como pode ser visto no desenvolvimento a seguir.

Escrevendo-se a derivação de  $w$  em relação a  $x$  em função de  $\sigma_{ij}$  e  $u_i$ , tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} [\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}] \quad (2.24)$$

mas como  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , chega-se a

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\frac{\partial u_i}{\partial x}) \quad (2.25)$$

Efetando-se a derivada do primeiro termo do segundo integrando da ex-

pressão 2.23 e utilizando-se a equação de equilíbrio tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad (2.26)$$

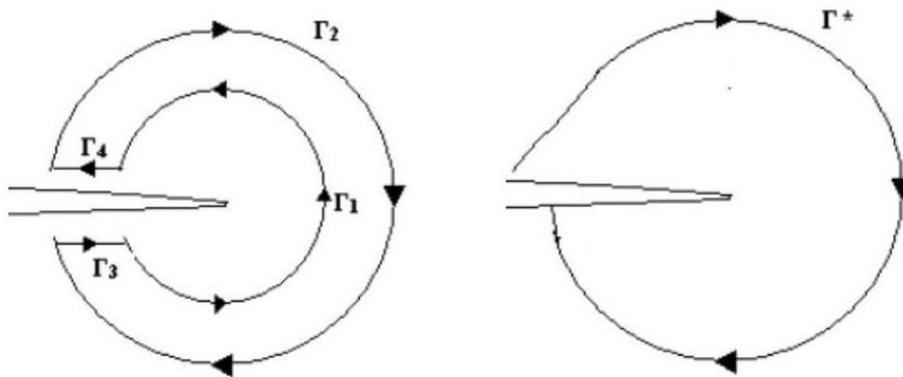
Das expressões 2.25 e 2.26 tem-se a composição da segunda integral da expressão 2.23 dada por:

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.27)$$

A expressão 2.27 é o integrando da equação de Rice na forma de integral de área. Essa equação é representada na sequência nas duas formas: como integral de contorno e de área, respectivamente, e estabelece que a integral em um contorno fechado é sempre nula se a densidade de energia de deformação  $w$  exibe propriedade potencial elástica e o sistema está em equilíbrio quase-estático. Para uma integral realizada ao redor da ponta da trinca, esse teorema gera uma independência de caminho pelo qual a integral é realizada, como pode ser observado na figura 12. Nessa figura nota-se que se o eixo  $x$  é paralelo às faces da trinca, isto implica que  $dy$  é nulo em  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  e, conseqüentemente, na equação de Rice os resultados da integrais de linha nos trechos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são simétricos. Isto conduz à afirmativa de que qualquer integral ao redor da ponta da trinca tem o mesmo valor, logo é uma constante.

$$J = \int_{\Gamma} \left( w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (2.28)$$

$$J = \int_A \left[ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \right] dx dy \quad (2.29)$$



**Figura 12:** Dois contornos arbitrários  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  ao redor da ponta da trinca e um contorno arbitrário  $\Gamma^*$  cuja a integral tem valor constante.

Então, para materiais elásticos lineares ou não, e em equilíbrio quase es-

tático, vale a simplificação da expressão 2.23:

$$J = \int_{A^*} [\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i}] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA \quad (2.30)$$

Pode ser observado ao se comparar a equações 2.30 e 2.19 que as expressões são idênticas desde que:

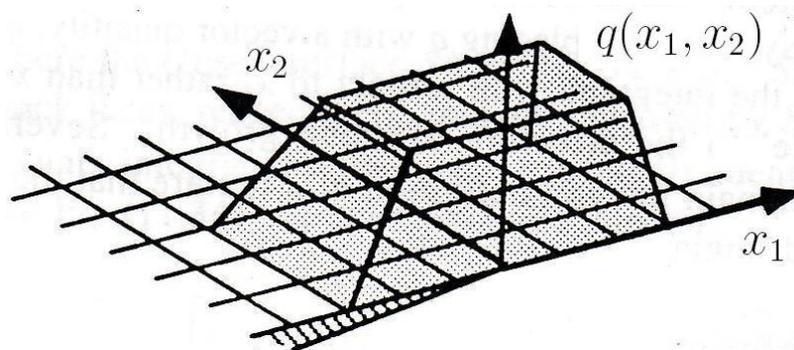
$$q = \Delta x_1 / \Delta a$$

então  $q$  pode ser interpretado como um deslocamento virtual normalizado.

## 2.4 Implementação

Para implementação do cálculo da integral  $J$ , a área  $A^*$ , onde é realizada a integração é demarcada pelos contornos interno  $\Gamma_0$  e externo  $\Gamma_1$ , conforme indicado na figura 11.

A função  $q$ , de valor unitário em  $\Gamma_0$  e valor nulo em  $\Gamma_1$ , é representada como uma função platô, conforme indica a figura 13.



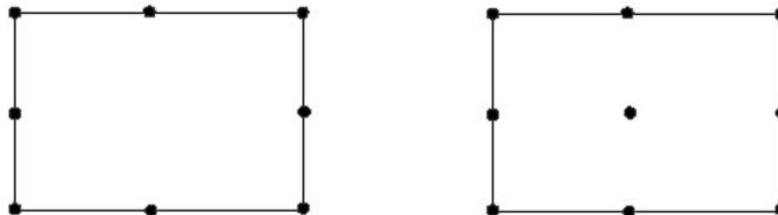
**Figura 13:** Variável  $q$  representada como uma função platô na ponta da trinca. Figura retirada de (ANDERSON, 1991)

Com respeito a essa opção o cálculo de  $J$  é insensível ao formato da função  $q$ , podendo-se fazer uso de uma forma piramidal na qual o vértice superior está posicionado sobre a ponta da trinca e tem valor de  $q$  unitário. De modo a inserir  $q$  no programa, este é quantificado como nulo em todos os nós do domínio, a menos daqueles que circundam a ponta da trinca onde o valor unitário é atribuído. A partir daí, valores intermediários de  $q$  são quantificados nos pontos da malha de integração por meio de aproximações lagrangeanas oriundas de uma malha de elementos finitos:

$$q(x_i) = \sum_{I=1}^n N_I q_I \quad (2.31)$$

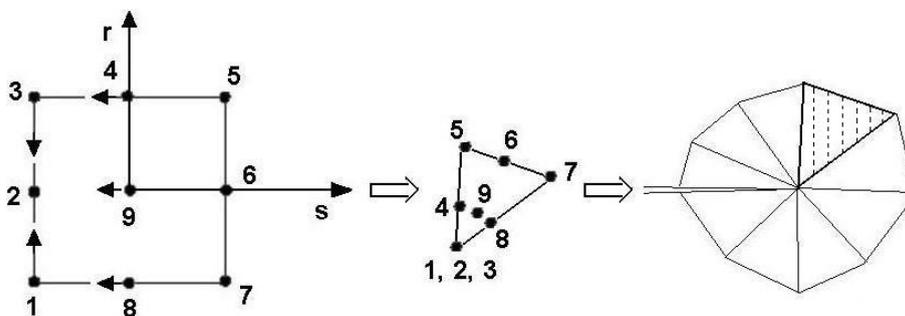
Vale observar que no cálculo da integral  $J$  representada na expressão 2.30, o único setor em que derivada é não nula corresponde a um anel circular que envolve a região da malha de integração onde se localiza a ponta da trinca.

Caso seja utilizado o método dos elementos finitos em duas dimensões na resolução de problemas envolvendo trincas, é recomendado o uso de elemento biquadrático lagrangeano de nove nós, mas os de oito nós também são bastante comuns. Esses elementos são mostrados na figura 14.



**Figura 14:** Elementos de oito e nove nós.

No tratamento de elementos na região da ponta da trinca, os elementos de quatro lados degeneram em triângulos fazendo-se o colapso de um lado em um ponto nodal. Em paralelo, os nós centrais dos lados adjacentes e o nó central do elemento se deslocam um quarto do comprimento do lado em sentido ao lado colapsado. O processo de degeneração é ilustrado na figura 15.



**Figura 15:** Degeneração de um elemento bidimensional de nove nós em um triângulo.

A modificação citada conduz a uma vantajosa singularidade de deformação para o elemento triangular. Essa singularidade é expressa por  $1/\sqrt{r}$ .

#### 2.4.1 Separação dos modos

Um procedimento matemático é utilizado para separar as contribuições dos  $K$  em seus modos específicos. Esse procedimento baseia-se no critério de

ajuste entre os modos denominado curva elíptica:

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 = 1 \quad (2.32)$$

Neste critério, a solução analítica de  $\sigma^{(a)}$  e  $u^{(a)}$  é sobreposta à solução numérica  $\sigma^{(b)}$  e  $u^{(b)}$ . Neste caso, utilizando-se a equação 2.12 e adicionando a solução analítica (a) à solução numérica (b),  $J$  passa a ser representado por:

$$J = \frac{K_I^2}{E} + \frac{K_{II}^2}{E}$$

$$J^{(a+b)} = \frac{(K_I^{(a)} + K_I^{(b)})^2 + (K_{II}^{(a)} + K_{II}^{(b)})^2}{E} \quad (2.33)$$

Expandindo-se a equação 2.33 em seu produto notável tem-se:

$$J^{(a+b)} = [(K_I^{(a)})^2 + (K_{II}^{(a)})^2 + (K_I^{(b)})^2 + (K_{II}^{(b)})^2]/E + 2(K_I^{(a)}K_I^{(b)} + K_{II}^{(a)}K_{II}^{(b)})/E \quad (2.34)$$

Os quatro primeiros termos da expressão 2.34 são as contribuições isoladas das soluções analíticas e numéricas nos dois modos citados e a expressão restante representa o termo de interação:

$$I^{(a,b)} = 2(K_I^{(a)}K_I^{(b)} + K_{II}^{(a)}K_{II}^{(b)})/E \quad (2.35)$$

O mesmo procedimento é feito em relação à integral de linha  $J$  para a soma de dois estados. Então, segundo (SANTANA, 2004), esta integral é expressa por:

$$J^{(a+b)} = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{(a)} + \sigma_{ij}^{(b)})(\epsilon_{ij}^{(a)} + \epsilon_{ij}^{(b)})\delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(a)} + \sigma_{ij}^{(b)})\frac{\partial(u_i^{(a)} + u_i^{(b)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (2.36)$$

Multiplicando-se separadamente o primeiro termo do integrando da expressão 2.36 tem-se:

$$P_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{(a)}\epsilon_{ij}^{(a)} + \sigma_{ij}^{(b)}\epsilon_{ij}^{(b)} + \sigma_{ij}^{(a)}\epsilon_{ij}^{(b)} + \sigma_{ij}^{(b)}\epsilon_{ij}^{(a)})\delta_{1j} \quad (2.37)$$

Multiplicando-se separadamente o segundo termo do integrando da ex-

pressão 2.36 tem-se:

$$P_2 = (\sigma_{ij}^{(a)} \frac{\partial u_i^{(a)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(b)} \frac{\partial u_i^{(b)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(a)} \frac{\partial u_i^{(b)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(b)} \frac{\partial u_i^{(a)}}{\partial x_1}) \quad (2.38)$$

Separando-se somente os termos de interação das expressões 2.37 e 2.38 tem-se :

$$I^{(a,b)} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{(a)} \epsilon_{ij}^{(b)} + \sigma_{ij}^{(b)} \epsilon_{ij}^{(a)})\delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(a)} \frac{\partial u_i^{(b)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(b)} \frac{\partial u_i^{(a)}}{\partial x_1}) \quad (2.39)$$

mas como

$$\sigma_{ij}^{(a)} \epsilon_{ij}^{(b)} = \sigma_{ij}^{(b)} \epsilon_{ij}^{(a)} = w^{(a,b)}$$

portanto, a integral de interação é descrita como

$$I^{(a,b)} = \int_{\Gamma} [w^{(a,b)}\delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(a)} \frac{\partial u_i^{(b)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(b)} \frac{\partial u_i^{(a)}}{\partial x_1}] n_j d\Gamma \quad (2.40)$$

De maneira a deixar a equação 2.40 mais conveniente ao trabalho com métodos sem malha, multiplica-se a mesma pela função  $q$  e, sequencialmente, aplica-se o teorema da divergência:

$$I^{(a,b)} = \int_A [w^{(a,b)}\delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(a)} \frac{\partial u_i^{(b)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(b)} \frac{\partial u_i^{(a)}}{\partial x_1}] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (2.41)$$

As equações de interação 2.35 e 2.41 permitem obter os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  para um carregamento de um corpo trincado genérico. A separação é efetuada pela consideração da solução analítica do modo desejado como unitário e do outro como nulo. Por exemplo, ao se desejar o modo I efetua-se:

$$I^{(a,b)} = 2(1.K_I^{(b)} + 0.K_{II}^{(b)})/E = 2K_I^{(b)}/E \quad (2.42)$$

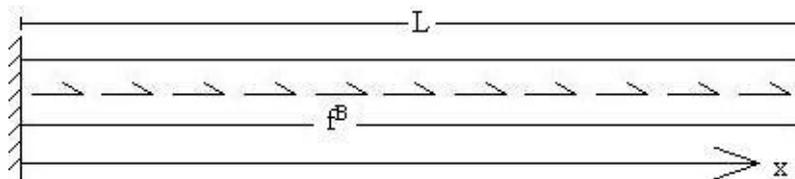
### 3 MÉTODO DE GALERKIN SEM ELEMENTOS

#### 3.1 Método dos resíduos ponderados

Os métodos dos resíduos ponderados são métodos numéricos utilizados para solucionar equações diferenciais com condições de contorno por meio de soluções aproximadas. Nesses métodos, famílias de funções com coeficientes a determinar são utilizadas para calcular o resíduo resultante da substituição da combinação linear dessas na equação diferencial que, em sequência, é multiplicado por uma função peso e integrada no domínio e seu contorno. A intenção é selecionar os coeficientes da combinação de funções de modo a minimizar o resíduo no intervalo avaliado. A combinação linear de funções com coeficientes desconhecidos é denominada solução propositiva e as utilizadas para ponderar o resíduo no intervalo são denominadas de funções teste ou peso. Ambas as funções podem ser quaisquer, mas as primeiras devem ainda satisfazer às condições essenciais de contorno e ter a derivada de mesma ordem da equação diferente de zero para o caso de aplicação sobre a forma forte, como será comentado a seguir.

Tomando-se a equação da barra com uma força distribuída  $f^B$ , como na figura 16, tem-se as equações da barra:

$$\begin{pmatrix} EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^B = 0 \\ u|_{x=0} = 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$



**Figura 16:** Barra com força distribuída.

Para as equações 3.1, a solução propositiva deve ter ao menos derivada de segunda ordem diferente de zero e ser composta de funções linearmente independentes que satisfaçam à condição de contorno para  $u|_{x=0}$ . Substituindo-se a solução exata  $u$  por uma solução propositiva  $u(x)$  dada por  $\mathbf{a}^T \mathbf{\Phi}$  composta pela base  $[\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)]$  e com coeficientes desconhecidos  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  tem-se, para o caso simples da divisão do domínio em um só intervalo, o resíduo dado por:

$$R_e = EA \mathbf{a}^T \frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial x^2} + f^B$$

Como houve a substituição da variável  $u$  correspondente à solução exata por uma solução propositiva  $u$ , a equação que correspondia à equação de equilíbrio do sistema em qualquer posição  $x$  passa a representar um valor diferente de zero. O resíduo tem  $n$  variáveis a serem calculadas e, portanto, necessita da confecção de um sistema composto de  $n$  equações. Assim, devem ser utilizadas  $n$  funções testes  $\mathbf{W}$ , representadas por  $W_1, W_2, \dots, W_n$ , que são multiplicadas pelo resíduo e integradas no domínio. A integração desse produto deve ser igualada a zero:

$$\int_0^L \mathbf{W} (EA \mathbf{a}^T \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}}{\partial x^2} dx + f^B) dx = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

$$EA \int_0^L \mathbf{W} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x^2} dx \mathbf{a} + \int_0^L \mathbf{W} f^B dx = \mathbf{0}$$

$$EA \int_0^L \mathbf{W} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x^2} dx \mathbf{a} = - \int_0^L \mathbf{W} f^B dx$$

$$\mathbf{K} = EA \int_0^L \mathbf{W} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x^2} dx$$

$$\mathbf{F} = - \int_0^L \mathbf{W} f^B dx$$

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Essa equação representa um sistema algébrico que tem " $\mathbf{a}$ " como incógnita.

De modo a reduzir o grau de diferenciação da solução propositiva, utiliza-se integração por partes chegando-se a outras equações de cálculo da matriz de rigidez e do vetor força:

$$\int_0^L \mathbf{W} (EA \mathbf{a}^T \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}}{\partial x^2} + f^B) dx = \mathbf{0}$$

$$\int_0^L EA \mathbf{W} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x^2} \mathbf{a} dx + \int_0^L \mathbf{W} f^B dx = \mathbf{0}$$

$$\int_0^L (-EA \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x} \mathbf{a} + \mathbf{W} f^B) dx + (EA \mathbf{W} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x} \mathbf{a}) \Big|_0^L = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

$$\left( \int_0^L -EA \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x} dx + EA \mathbf{W} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x} \Big|_0^L \right) \mathbf{a} = - \int_0^L \mathbf{W} f^B dx$$

$$\mathbf{K} = \int_0^L -EA \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x} dx + EA \mathbf{W} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x} \Big|_0^L$$

$$\mathbf{F} = - \int_0^L \mathbf{W} f^B dx$$

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

A equação 3.3 é chamada de forma fraca do Método dos Resíduos Ponderados e sua equação de origem, equação 3.2, é denominada de forma forte.

Considerando-se a forma forte, pode-se generalizar um operador  $EA \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  para um operador qualquer  $G$  e o domínio de 0 a  $L$  para um domínio  $\Omega$  onde a força  $f^B$  atue, resultando em um sistema de  $n$  equações algébricas:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (W_i G \phi_j) d\Omega$$

$$F_i = \int_{\Omega} f^B W_i d\Omega$$

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Os MRP são divididos de acordo com as funções peso utilizadas, sendo os métodos clássicos apresentados a seguir.

### 3.1.1 Método da colocação

Nesta abordagem pretende-se zerar o resíduo em pontos específicos do domínio, e para isto é utilizada como função peso à função delta de Dirac. Como a função peso utilizada é única, necessita-se que o número de pontos de colocação seja igual à quantidade de funções de base, para tornar o sistema determinado.

### 3.1.2 Método dos mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados busca-se minimizar a função  $\Pi$  que simboliza a soma dos quadrados dos resíduos a partir das incógnitas que multi-

plicam as funções de base.

$$R_e = (Gu - f^B) = (G(a_i\phi_i) - f^B)$$

$$\Pi = \int_{\Omega} (Re)^2 d\Omega = \int_{\Omega} (G(a_i\phi_i) - f^B)^2 d\Omega$$

Derivando-se  $\Pi$  em relação a  $a_i$ :

$$\int_{\Omega} 2(G(a_i\phi_i) - f^B) \frac{dR_e}{da_j} d\Omega = 0$$

dividindo-se por 2:

$$\int_{\Omega} (G(a_i\phi_i) - f^B) \frac{dR_e}{da_j} d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

Observando-se que na equação 3.4 a derivada do resíduo  $Re$  em relação aos coeficientes  $\mathbf{a}$  são as funções peso tem-se:

$$\int_{\Omega} (G(a_i\phi_i) - f^B) [G(\phi_j)] d\Omega = 0$$

Assim, resulta-se em um sistema de equações algébricas:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (G(\phi_i) G(\phi_j)) d\Omega$$

$$F_i = \int_{\Omega} f^B G\phi_i d\Omega$$

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{F}$$

### 3.1.3 Método de Galerkin

Neste método, as funções que compõem  $\mathbf{W}$  são idênticas à família de funções  $\emptyset$  componentes da função propositiva, portanto, analisando-se a forma forte, tem-se:

$$\int_{\Omega} (G(a_i\phi_i) - f^B) \phi_j d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} ((\phi_i) G(\phi_j)) d\Omega$$

$$F_i = \int_{\Omega} f^B \phi_i d\Omega$$

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Como pode ser notado a partir da equação 3.5, para o método de Galerkin, o operador  $G$  influi na simetria da matriz  $\mathbf{K}$ . Se  $G$  for simétrico a matriz  $\mathbf{K}$  torna-se simétrica. A simetria da matriz  $\mathbf{K}$  é de grande valia computacional, contribuindo para diminuição no espaço de memória utilizado, por necessitar armazenar somente metade da matriz. Além disto, se as funções de forma  $\phi_i$  e  $\phi_j$  são de suporte compacto, como a do método dos elementos finitos ou de métodos sem malha, ou seja, diferentes de zero apenas em subdomínios pequenos, isto implica em dizer que somente na interseção dos subdomínio e de seus contornos  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$  a matriz  $\mathbf{K}$  é não nula:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (\phi_i G \phi_j) d\Omega = \int_{\Omega_i \cap \Omega_j} (\phi_i G \phi_j) d\Omega$$

Caso a interseção seja nula ou não haja nós comuns aos subdomínios, o coeficiente  $K_{ij}$  é nulo.

A equação 3.5 é a forma forte do método dos resíduos ponderados para o método de Galerkin, pois tem a ordem mais alta de derivada. Como a solução propositiva deve ser diferenciável o mesmo número de vezes do operador e sua última derivada deve ser não nula, ocorre uma restrição no universo de funções. Visando expandir o universo de funções a serem utilizadas como solução propositiva, realizam-se integrações por parte de modo a reduzir a ordem de derivação da equação do resíduo. Este procedimento conduz a forma fraca do método de Galerkin.

Antes de ser introduzido o método de Galerkin na forma fraca, será desenvolvido o Princípio dos Trabalhos Virtuais para que se possa fazer uma comparação entre ambos. Assim, retornando-se a equação diferencial de equilíbrio, equação 3.1, que vale para qualquer ponto da barra, pode-se fazer a seguinte multiplicação por um deslocamento virtual  $\delta u$ :

$$\left( EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^B \right) \delta u = 0$$

onde  $\delta u$  é arbitrário para todo  $x$  da barra a menos em  $x$  igual zero onde  $\delta u$  é nulo.

Multiplicando-se por  $dx$  e integrando no intervalo de definição da equação

diferencial, tem-se:

$$\int_0^L (EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^B) \delta u \, dx = 0 \quad (3.6)$$

$$\int_0^L EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u \, dx + \int_0^L f^B \delta u \, dx = 0$$

E integrando-se por partes o primeiro termo, obtém-se

$$\int_0^L EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u \, dx = [EA \frac{\partial u}{\partial x} \delta u]_L - [EA \frac{\partial u}{\partial x} \delta u]_0 - \int_0^L EA \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \, dx$$

O segundo termo do lado direito dessa equação é nulo, pois  $\delta u|_0$  é nulo e  $(EA \frac{\partial u}{\partial x})|_L$  é equivalente a uma força aplicada na extremidade, que, nesse caso, é nula. Então, substituindo na equação original, chega-se a

$$\left( \begin{array}{l} \int_0^L \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} EA \frac{\partial u}{\partial x} \, dx = \int_0^L f^B \delta u \, dx + [EA \frac{\partial u}{\partial x} \delta u]_L \\ u|_{x=0} = 0 \\ \delta u|_0 = 0 \end{array} \right) \quad (3.7)$$

A equação 3.7 é a representação do princípio dos trabalhos virtuais em Mecânica. Esse princípio reza que um deslocamento virtual imposto ao corpo em seu estado de equilíbrio, o trabalho virtual interno é igual ao trabalho virtual externo.

Retornando ao método de Galerkin na forma fraca, substitui-se na equação 3.6  $\delta u$  por  $W_i$ , sendo  $u$  e  $W_i$  nulos em  $x = 0$ . E fazendo-se o procedimento de integração por partes, obtém-se:

$$\int_0^L (EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^B) W_i \, dx = 0$$

$$\int_0^L \frac{\partial W_i}{\partial x} EA \frac{\partial u}{\partial x} \, dx = \int_0^L f^B W_i \, dx + [(EA \frac{\partial u}{\partial x}) W_i]_L \quad (3.8)$$

Comparando-se a expressão 3.8 com a expressão 3.7, observa-se que o método de Galerkin na forma fraca corresponde ao princípio dos trabalhos virtuais.

### 3.2 Método de Rayleigh-Ritz

Este método obtém a solução aproximada da equação diferencial e de suas condições de contorno utilizando-se o funcional  $\Pi$  descrito abaixo. Similarmente aos métodos anteriores, é assumida uma solução propositiva que satisfaça às condições de contorno essenciais e essa solução é substituída diretamente no funcional. Em sequência é realizada derivada do funcional em relação aos parâmetros desconhecidos da solução propositiva e seu resultado é igualado a zero. Esse procedimento é realizado de modo a compor um sistema algébrico. O método de Rayleigh-Ritz, por trabalhar diretamente com o funcional e ter ordem de derivada menor do que a forma forte do método de Galerkin, utiliza o mesmo universo de funções da forma fraca de Galerkin, ou seja, necessita de funções com metade da derivada da equação diferencial de equilíbrio. O funcional associado ao problema representado na figura 16 é dado por:

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^L u f^B dx \quad (3.9)$$

$$u|_{x=0} = 0$$

Como exemplo, supondo-se uma solução propositiva expressa por:

$$u(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 \quad (3.10)$$

Ao se substituir a solução propositiva no funcional dado pela expressão 3.9 resulta-se na função

$$\Pi = 6EAa_1^2 L^3 + 6EAa_1 a_2 L^2 + 2EAa_2^2 L - a_1 f^B \frac{L^4}{4} - a_2 f^B \frac{L^3}{3} \quad (3.11)$$

Derivando-se parcialmente a função anterior em relação aos parâmetros  $a_1$  e  $a_2$ , e igualando-se a zero tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Como resultado, tem-se um sistema algébrico representado por

$$\begin{cases} 12EAa_1 L^3 + 6EAa_2 L^2 = f^B \frac{L^4}{4} \\ 6EAa_1 L^2 + 4EAa_2 L = f^B \frac{L^3}{3} \end{cases} \quad (3.13)$$

A solução do sistema é representada por

$$\begin{aligned} a_1 &= -f^B L / (12EA) \\ a_2 &= 5f^B L^2 / (24EA) \end{aligned}$$

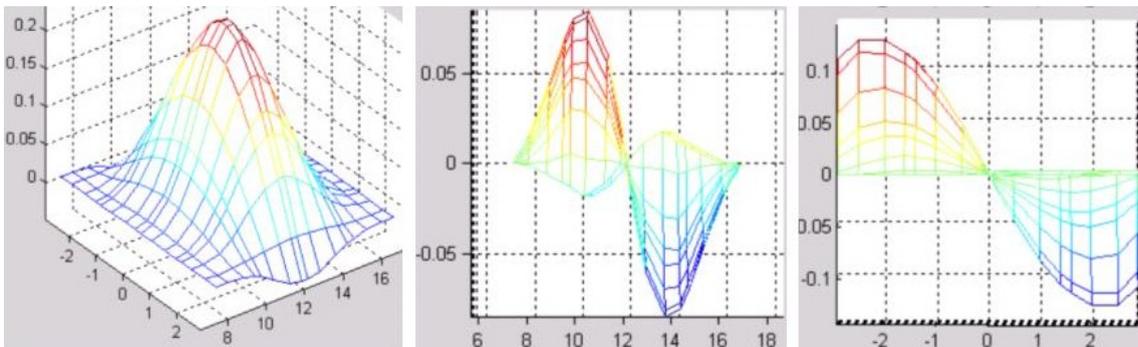
### 3.3 Método de Galerkin sem elementos

O desenvolvimento do método de Galerkin sem elementos é efetuado pela composição do método dos resíduos ponderados de mesmo nome com a utilização de funções de forma construídas de acordo com o método dos mínimos quadrados. Assim, de modo similar ao método dos elementos finitos, o método de Galerkin sem elementos é, também, um método de resolver equações diferenciais que ao invés de utilizar família de funções de interpolação  $\phi_i$  como as de Lagrange ou outras, utiliza a aproximação dos mínimos quadrados móveis. Então, os deslocamentos nodais da estrutura são representados por:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i u_i \quad (3.14)$$

onde  $u_i$  é o valor do campo  $u$  em  $x_i$  e  $\phi_i$  é dado de acordo com aproximação mínimos quadrados móveis.

Na figura 17 são apresentadas exemplos de funções de forma do método de Galerkin sem elementos e suas derivadas.



**Figura 17:** Da esquerda para a direita: função de forma do MGSE, derivada da função de forma do MGSE em relação à  $x$ , e derivada da função de forma do MGSE em relação à  $y$ .

## 3.3.1 Formulação variacional e discretização

Considerando-se problemas em duas dimensões em um domínio  $\Omega$  e limitado por um contorno  $\Gamma$ , as equações diferenciais de equilíbrio e as condições de contorno se escrevem:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} \text{ em } \Omega & (3.15) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \boldsymbol{\tau} \text{ em } \Gamma_t \text{ (cond. de contorno naturais)} \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_u \text{ (cond. de contorno essenciais)}\end{aligned}$$

onde  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}$  é o tensor tensão,  $\mathbf{D}$  é a matriz de propriedade do material,  $\boldsymbol{\epsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla)/2$  é o tensor deformação específica,  $\mathbf{u}$  é o vetor deslocamento,  $\mathbf{b}$  é o vetor força de corpo,  $\boldsymbol{\tau}$  e  $\bar{\mathbf{u}}$  são, respectivamente, os vetores tensão e deslocamento prescritos,  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal ao domínio e  $\Gamma_t$  e  $\Gamma_u$  são as partes do domínio onde as forças externas são aplicadas e deslocamento são prescritos, respectivamente. A forma fraca da equação de equilíbrio e condições de contorno é:

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla \mathbf{w})^T : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{w}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\Gamma - \delta W_u = 0 \quad (3.16)$$

onde  $\mathbf{w}$  representa a função peso e  $\delta W_u$  representa o termo para as condições de contorno essenciais. A forma explícita desse termo depende do método pelo qual a condição de contorno é imposta. Supondo-se a utilização de multiplicadores de Lagrange,  $W_u$  é definido como:

$$W_u = \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}]$$

em que  $x_J \in \Gamma_u$  e  $\boldsymbol{\lambda}^T$  é o vetor das forças de reação nos nós restritos.

Então, tem-se:

$$\delta W_u = \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}] \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{w}^T \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \quad (3.17)$$

As equações 3.16 e 3.17 correspondem à forma fraca obtida a partir das equações diferenciais de equilíbrio. Utilizando-se funções de interpolação lagrangeanas  $N_I$  ao longo de um comprimento de arco  $s$  em  $\Gamma_u$ , o multiplicador de Lagrange é representado pelo somatório:

$$\boldsymbol{\lambda} = N_I(s)\lambda_I, \text{ em } \Gamma_u$$

Assim, tem-se:

$$\delta\boldsymbol{\lambda} = N_I(s)\delta\lambda_I, \text{ em } \Gamma_u$$

Ao se substituir as funções de forma oriundas da aproximação de mínimos quadrados móveis nas funções da solução propositiva  $\mathbf{u}$  e funções peso  $\mathbf{w}$ , transforma-se a forma fraca da equação de Galerkin em um sistema de equações algébricas lineares:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$$

equivalente ao sistema

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.18)$$

onde

$$k_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega$$

$$\mathbf{f}^{extT} = [f_1^{ext}, f_2^{ext}, \dots, f_N^{ext}], \text{ com } f_I^{ext} = \int_{\Omega} \phi_I \mathbf{b}^T d\Omega + \int_{\Gamma_t} \phi_I \boldsymbol{\tau}^T d\Gamma$$

$$q_k = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_k \bar{\mathbf{u}} d\Gamma$$

$$G_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \phi_I \mathbf{N}_K d\Gamma$$

e

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \phi_{I,1} & 0 \\ 0 & \phi_{I,2} \\ \phi_{I,2} & \phi_{I,1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_K = \begin{bmatrix} N_K & 0 \\ 0 & N_K \end{bmatrix}$$

Além disto, a matriz  $\mathbf{D}$ , para o estado plano de tensão, é dada por:

$$\mathbf{D} = E/(1 - \nu^2) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}$$

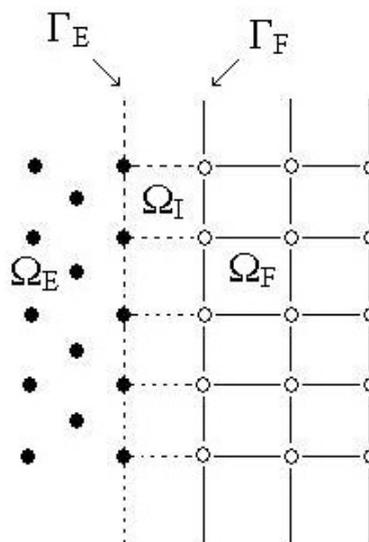
e para o estado plano de deformação é

$$\mathbf{D} = E/((1 + \nu)(1 - 2\nu)) \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Conforme citado no capítulo 2 desta dissertação, além do uso de multiplicadores de Lagrange, existem outras formas de aplicação das condições de contorno no método de Galerkin sem elementos, sendo também bastante utilizado o acoplamento com MEF devido sua simplicidade.

### 3.3.2 Acoplamento MGSE-MEF

Esta estratégia procura setorizar a aplicação do MGSE a regiões onde ocorrem grandes gradientes. O acoplamento MGSE-MEF utiliza as melhores características dos dois métodos: a facilidade da aplicação das condições de contorno do MEF com a praticidade do MGSE no que tange a ausência da reconstrução da malha. É uma estratégia muito interessante pois, nas regiões onde não ocorrem gradientes elevados, o MQM é computacionalmente mais caro que o MEF. Além disto, sua utilização permite evitar a utilização dos multiplicadores de lagrange pelo MQM nas condições de contorno essenciais. O acoplamento, indicado na figura 18, é realizado pela introdução de uma interface entre os domínios do MEF e do MGSE na qual uma aproximação de deslocamento híbrida é definida de modo a garantir a continuidade.



**Figura 18:** Acoplamento entre MGSE e MEF.

Os deslocamentos do MEF e do MGSE são dados por:

$$\begin{cases} u^{MEF}(x) = \sum_i^n \phi_i^{MEF}(x)u_i, & x \in \Omega_F \\ u^{MGSE}(x) = \sum_i^m \phi_i^{MGSE}(x)u_i, & x \in \Omega_E \end{cases} \quad (3.19)$$

e os deslocamentos na região de interface são expressos por:

$$\begin{aligned} u^{acoplamento}(x) &= u^{MEF}(x) + R(x)(u^{MGSE}(x) - u^{MEF}(x)), \quad \text{ou} \\ u^{acoplamento}(x) &= (1 - R(x))u^{MEF}(x) + R(x)u^{MGSE}(x), \quad x \in \Omega_I \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $R(x)$  é uma função rampa definida como sendo igual à soma das funções de forma do MEF associadas com nós dos elementos de interface que estão sobre o contorno do elemento sem malha, valendo

$$R(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ pertence a } \Omega_E \\ 0, & \text{se } x \text{ pertence a } \Omega_F \end{cases}$$

Daí, representando-se graficamente a função rampa para as possíveis combinações nodais, obtém-se a figura 19.

Substituindo-se os deslocamentos  $u^{MEF}(x)$  e  $u^{MGSE}(x)$  representados pela equação 3.19 na equação 3.20, tem-se  $u^{acoplamento}(x)$  em função dos valores nodais  $u_i$ :

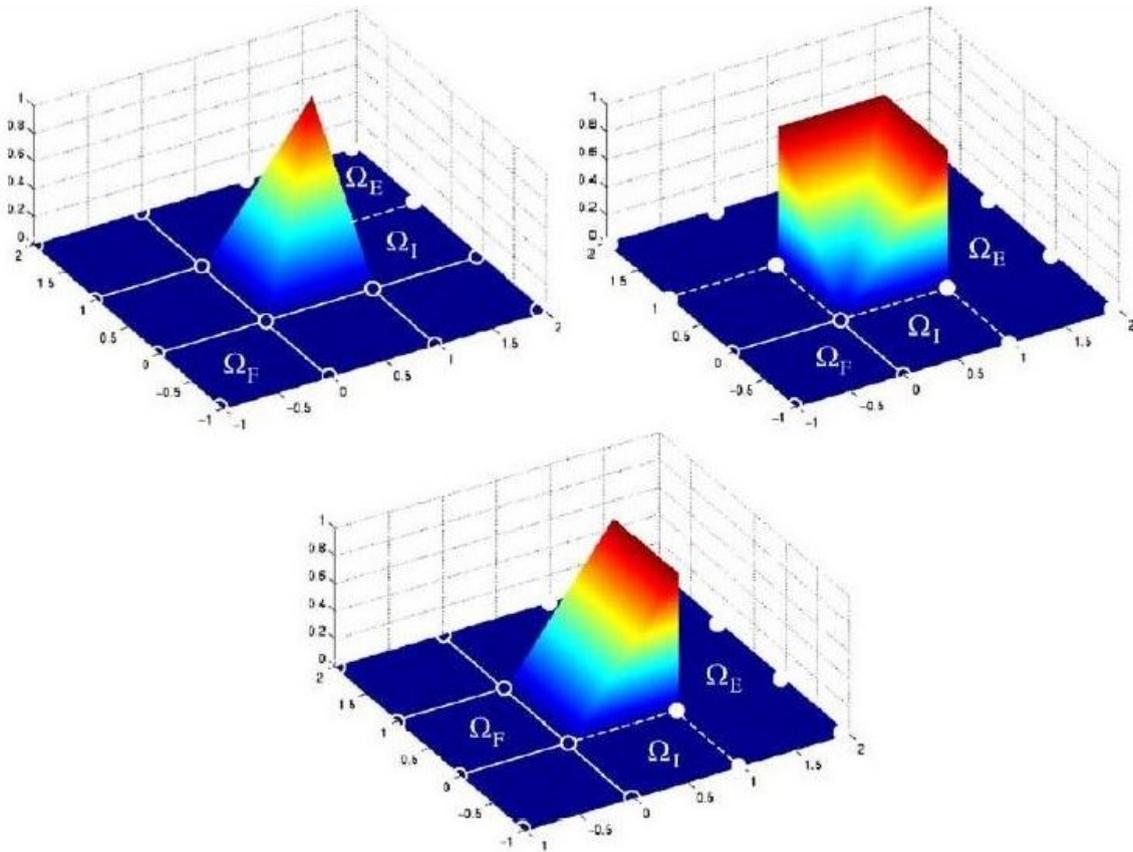
$$u^{acoplamento}(x) = (1 - R(x)) \sum_{i=1}^n \phi_i^{MEF}(x)u_i + R(x) \sum_{i=1}^m \phi_i^{MGSE}(x)u_i, \quad x \in \Omega_I \quad (3.21)$$

A partir da equação 3.21 obtém-se a função de forma de acoplamento:

$$\tilde{N}_i(x) = \begin{cases} (1 - R(x))\phi_i^{MEF}(x) + R(x)\phi_i^{MGSE}(x), & \text{se } x \text{ pertence a } \Omega_I \\ R(x)\phi_i^{MGSE}(x), & \text{se } x \text{ não pertence a } \Omega_I \end{cases}$$

com

$$\sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(x) = 1$$



**Figura 19:** Acoplamentos da esquerda para a direita e de cima para baixo com: 1 nó MGSE e 3 nós MEF, 3 nós MGSE e 1 nó MEF, e 2 nós MGSE e 2 nós MEF. Figura retirada de (LACROIX; BOUILLARD, 2003).

### 3.4 Aplicação do MIP ao método dos resíduos ponderados de Galerkin

Assim como o MQM é a função de aproximação utilizada pelo MGSE, as funções de forma oriundas do MIP também podem ser substituídas como funções propositiva  $u$  e de teste  $w$  na forma fraca da equação de Galerkin. Mas para o MIP o sistema algébrico é gerado como no MEF, pois em ambos as funções de forma são interpolantes e aplicam-se diretamente as condições de contorno. De modo a poder efetuar uma comparação entre os dois procedimentos, ao invés de fazer a eliminação de linhas e colunas para aplicação das condições de contorno, serão utilizados multiplicadores de Lagrange a partir do variacional de um funcional:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (3.22)$$

Para esse funcional, a condição de equilíbrio e imposição dos deslocamen-

tos prescritos  $\bar{\mathbf{u}}$  são expressas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{u}}} &= 0 \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

A introdução dos multiplicadores de Lagrange no funcional é uma correção do funcional original efetuada pelo acréscimo de mais um termo de força aplicada nos nós restritos:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{F} + \lambda^T (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \quad (3.23)$$

Compondo-se uma matriz  $\mathbf{E}$  de "zeros" e "uns", tal que:

$$\mathbf{E} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$$

e escrevendo-se a condição de estacionaridade  $\delta \Pi = 0$

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} + \delta \lambda^T (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) + \lambda^T \delta \mathbf{u} &= 0 \\ \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{R} + \lambda^T \mathbf{E} \delta \mathbf{u} + \delta \lambda^T (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) &= 0\end{aligned}$$

Separando-se o variacional em duas equações e sabendo-se que  $\delta \mathbf{u}$  e  $\delta \lambda$  são arbitrários:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F} + \mathbf{E}^T \lambda) = 0 \\ \delta \lambda^T (\mathbf{E} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) = 0 \end{cases}$$

tem-se

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T & \lambda^T \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{F}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T & \bar{\mathbf{u}}^T \end{bmatrix}$$

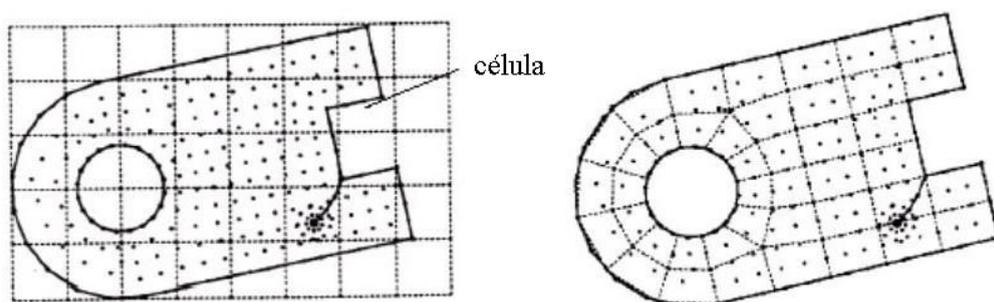
$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{u}} \quad (3.24)$$

Efetuando-se uma comparação entre o método de aplicação das condições de contorno por multiplicadores de Lagrange no MIP com MGSE, observa-

se que para o último é necessário a introdução de duas integrais (equação 3.18): uma em  $\mathbf{q}$  para calcular parte dos componentes do vetor força e outra integral em  $\mathbf{G}$  para compor com a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . A introdução dessas duas integrais majoriza o trabalho na aplicação das condições de contorno prescritas. No MIP ou no MEF, mesmo utilizando-se multiplicadores de Lagrange, o procedimento é muito mais simples com a composição da matriz  $\mathbf{E}$  composta de "zeros" e "uns" sem a necessidade de nenhum outro cálculo.

### 3.5 Integração do domínio

Para realizar o processo de integração nos métodos sem malha, duas abordagens podem ser efetuadas: o enquadramento da estrutura avaliada em uma malha de células de integração ou a divisão domínio da estrutura em células de integração, como em elementos finitos. Os dois procedimentos são indicados na figura 20.



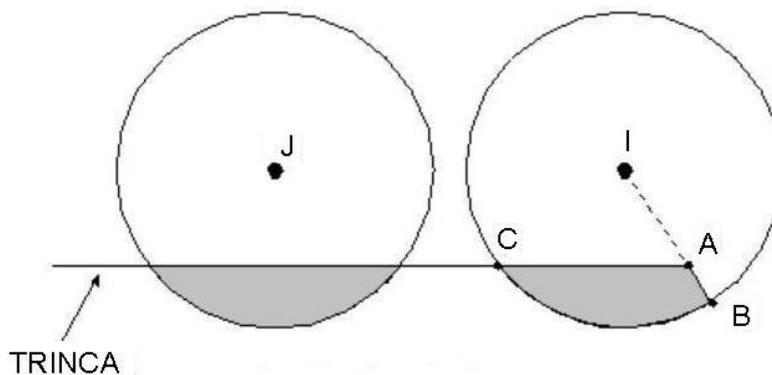
**Figura 20:** Da esquerda para a direita: o enquadramento da estrutura em células de integração e a divisão das células de integração em elementos. Figura retirada de (SANTANA, 2004).

No primeiro caso, após distribuição dos nós no domínio conforme o refinamento necessário, a integração é realizada em todas as células, mesmo as que cobrem parcialmente o domínio da estrutura levando-se em conta apenas as contribuições dos pontos de Gauss que estão dentro do domínio. Essa técnica apresenta como desvantagem não representar fielmente o domínio da peça, além de apresentar erros de integração em virtude da desconsideração ou não de pontos do contorno. Na segunda alternativa a integração numérica é realizada da mesma maneira do MEF. Devido às diferentes abordagens, a primeira e segunda técnicas são chamadas, respectivamente, de método sem malha verdadeiro e método sem malha falso.

## 4 REPRESENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA TRINCA

### 4.1 Critérios de visibilidade e de difração

A técnica mais simples utilizada para efetuar a representação da trinca no MGSE é denominada critério de visibilidade. Por esse critério a trinca é comparada a uma superfície opaca e as linhas que ligam os nós equivalem a raios luminosos. Quando os raios luminosos se encontram com uma superfície opaca são barrados. De maneira simples, este procedimento trunca o domínio do nó e assim alguns nós anteriormente pertencentes a ele passam a não contribuir no cálculo dos coeficientes  $K_{ij}$ . Esse procedimento está exemplificado na figura 21, que representa os subdomínios do nós I e J cortados por uma trinca total e parcialmente. As regiões acinzentadas dos subdomínios não conseguem ser ligadas por um raio luminoso a seus respectivos nós, assim da mesma maneira, para uma distribuição nodal qualquer, os nós pertencentes a essa região acinzentada não conseguem ser ligados ao nó principal I ou J, não contribuindo para o cálculo de suas funções de forma. Uma deficiência do critério de visibilidade se apresenta quando o subdomínio é cortado parcialmente, conforme ocorre para o nó I. Nessa situação ocorre um empobrecimento da precisão dos valores das tensões na ponta da trinca.



**Figura 21:** Domínio de influência dos nós J e I sendo contados pela trinca segundo o critério de visibilidade.

De modo a contornar esse problema de perda de precisão apresentado nas pontas da trinca, foi criado o critério de difração. O critério de difração é um complemento à idéia comparativa do critério de visibilidade por sugerir um efeito de difração do raio luminoso na extremidade da ponta da trinca englobando pontos outrora descartados. Então, quando a linha que representa o raio luminoso intercepta a ponta da trinca, ao invés de ser bloqueada diretamente, essa difrata e engloba pontos dentro do domínio do nó de referência anteriormente descartados pelo critério de visibilidade. A difração é representada matematicamente

por:

$$d_I = \left( \frac{d_1 + d_2(x)}{d_0(x)} \right)^\lambda d_0(x) \quad (4.1)$$

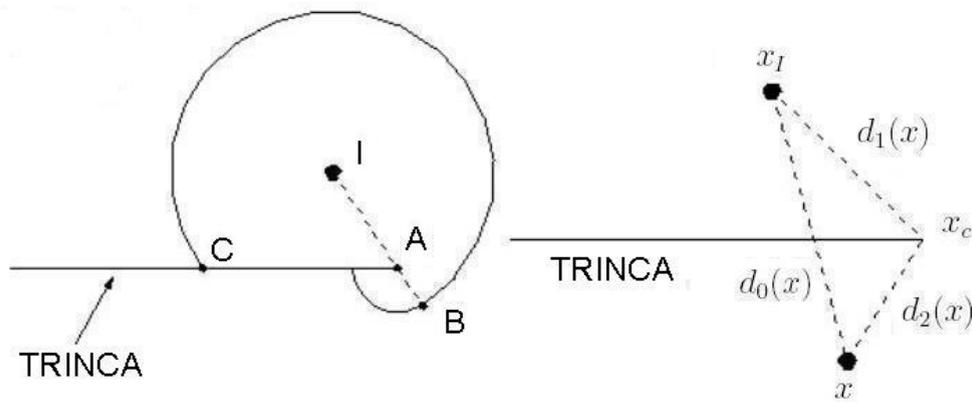
tal que as distâncias são definidas na equação a seguir e representadas na figura 22

$$d_1(x) = \|x_I - x_c\|; \quad d_2(x) = \|x - x_c\|; \quad d_0(x) = \|x - x_I\| \quad (4.2)$$

onde

- .  $x_I$  é a posição do nó central do domínio de influência;
- .  $x$  é a posição de outro nó pertencente ao domínio;
- .  $x_c$  é a posição da ponta da trinca.

O parâmetro  $\lambda$  controla a distância que o raio luminoso alcança por difração após a trinca. Esse parâmetro é usualmente utilizado com valor unitário, obtendo-se bons resultados.



**Figura 22:** Representação do domínio de influência do nó segundo o critério de difração.

Devido à utilização do critério de difração ocorre uma suavização da função de forma na ponta da trinca, evitando-se o corte abrupto dessa, como ocorre no critério de visibilidade como consequência do truncamento.

## 4.2 Enriquecimento da base

Esta técnica, totalmente diferente do primeira, modifica a estrutura do MGSE no cerne do algoritmo gerador das funções de forma, ou seja, no método

de aproximação MQM. Utilizando-se a característica do MQM de ser hábil a reproduzir qualquer função componente de sua base, incluem-se funções linearmente independentes que sejam base da característica do problema estudado, nesse caso a trinca, capacitando o MGSE a gerar os campos de ponta de trinca onde essas apareçam no domínio. A maior vantagem desta técnica jaz na simplicidade de inserção das funções enriquecidas.

Para realizar o enriquecimento de uma base de funções é possível incluir mais ou menos funções de acordo com a complexidade do assunto abordado, fazendo-se um enriquecimento total ou parcial conforme as funções de forma escolhidas. As bases dadas para esses tipos de enriquecimento em relação a problemas que envolvem trincas são definidas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y, \sqrt{r}] && \text{enriquecimento parcial} \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y, \sqrt{r}\cos(\theta/2), \sqrt{r}\sen(\theta/2), \sqrt{r}\sen(\theta/2)\sen(\theta), \\ &\quad \sqrt{r}\cos(\theta/2)\sen(\theta)] && \text{enriquecimento total} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Esta técnica trabalha satisfatoriamente utilizando-se o enriquecimento total, mas devido ao aumento da base (linear) de três para sete termos, um esforço computacional é acrescido por ser necessário inverter uma matriz  $\mathbf{A}$  (representada na equação 1.4) de dimensão sete por sete para cada ponto de Gauss. Outra desvantagem está associada a um mau condicionamento da matriz  $\mathbf{A}$  quando é efetuado o acoplamento de uma base linear a uma base enriquecida somente nas proximidades da trinca, ou seja, quando se faz a opção de um enriquecimento somente local. Fazendo-se uso do enriquecimento agindo apenas localmente, deve-se utilizar o acoplamento similar ao indicado na seção 3.3.2 desta dissertação para vincular as regiões enriquecidas com as de base simples. Cabe ao engenheiro optar por caminhar entre os transtornos do mau condicionamento de matrizes ou optar pela segurança de uma base enriquecida em todo o domínio, mas com um tempo de máquina dilatado.

É importante comentar que para colocação de mais de uma trinca, termos adicionais devem ser acrescidos à base para cada trinca.

### 4.3 Funções propositivas enriquecidas

Neste procedimento, a solução propositiva é aumentada pela inclusão de termos característicos do problema estudado. Então, o campo de deslocamento  $u$  passa a ser representado por:

$$u_{\alpha}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}_{\alpha}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n_c} [k_1^j Q_{1\alpha}^j(\mathbf{x}) + k_2^j Q_{2\alpha}^j(\mathbf{x})] \quad (4.4)$$

em que  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$  é a base polinomial,  $\mathbf{a}_{\alpha}(\mathbf{x})$ , são os coeficientes polinomiais e  $Q_{ij}$  são funções representativas do campo de deslocamentos na ponta da trinca expressas pelo conjunto de equações

$$\begin{aligned} Q_{11}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{r}{2\pi}\right)} \cos(\theta) [\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)] \\ Q_{12}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{r}{2\pi}\right)} \cos(\theta) [\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)] \\ Q_{21}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{r}{2\pi}\right)} \cos(\theta) [\kappa + 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)] \\ Q_{22}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{r}{2\pi}\right)} \cos(\theta) [\kappa - 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde

$\mu$  é o módulo de cisalhamento ;

$\nu$  é a coeficiente de Poisson;

e  $\kappa$  é a constante de Kolosov dada por  $(3 - \nu)/(1 + \nu)$  no caso do estado plano de tensão.

Para a análise de trincas, os deslocamentos acrescidos de funções propostas enriquecidas são oriundos da função representada por:

$$F = \sum_{I=1}^n \frac{1}{2} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}_{\alpha}(\mathbf{x}) + \sum_{I=1}^{n_c} [k_1^j Q_{1\alpha}^j(\mathbf{x}_I) + k_2^j Q_{2\alpha}^j(\mathbf{x}_I)] - u_{I\alpha}]^2 \quad (4.6)$$

Calculando-se as derivadas da função  $F$  dada na expressão anterior com relação  $\mathbf{a}_{\alpha}$  e igualando-se a zero chega-se à equação:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}_{\alpha}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \mathbf{P}_I(\mathbf{x})(u_{I\alpha} - \sum_{I=1}^{n_c} [k_1^j Q_{1\alpha}^j(\mathbf{x}_I) + k_2^j Q_{2\alpha}^j(\mathbf{x}_I)]) \quad (4.7)$$

onde

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I);$$

$$\mathbf{P}_I(\mathbf{x}) = [w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)].$$

Deve ser notado que os coeficientes adicionais  $k_1^j$  e  $k_2^j$  são constantes globais.

A partir da inversão da matriz  $\mathbf{A}$  na equação 4.7, calcula-se os coeficientes  $\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_I(\mathbf{x}) (u_{I\alpha} - \sum_{I=1}^{n_c} [k_1^j Q_{1\alpha}^j(\mathbf{x}_I) + k_2^j Q_{2\alpha}^j(\mathbf{x}_I)]) \quad (4.8)$$

Substituindo-se os coeficientes  $\mathbf{a}_\alpha$  na equação 4.6 chega-se à equação abaixo, que descreve os deslocamentos acrescidos com funções propositivas enriquecidas para serem aplicadas em casos associados à trinca:

$$u_\alpha^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_I(\mathbf{x}) (u_{I\alpha} - \sum_{I=1}^{n_c} [k_1^j Q_{1\alpha}^j(\mathbf{x}_I) + k_2^j Q_{2\alpha}^j(\mathbf{x}_I)]) + \sum_{j=1}^{n_c} [k_1^j Q_{1\alpha}^j(\mathbf{x}) + k_2^j Q_{2\alpha}^j(\mathbf{x})] \quad (4.9)$$

A equação 4.9 pode ser simplificada com a da substituição de alguns termos pelas variáveis expressas por:

$$\begin{aligned} \phi_I &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_I(\mathbf{x}) \\ \tilde{u}_{I\alpha} &= u_{I\alpha} - \sum_{I=1}^{n_c} [k_1^j Q_{1\alpha}^j(\mathbf{x}_I) + k_2^j Q_{2\alpha}^j(\mathbf{x}_I)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Essa substituição resulta na equação simplificada para os deslocamentos com funções propositivas enriquecidas:

$$u_\alpha^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) \tilde{u}_{I\alpha} + \sum_{j=1}^{n_c} [k_1^j Q_{1\alpha}^j(\mathbf{x}) + k_2^j Q_{2\alpha}^j(\mathbf{x})] \quad (4.11)$$

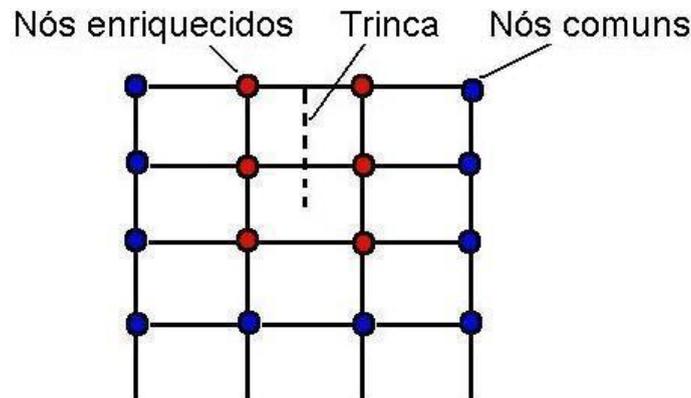
#### 4.4 Método nuvens HP

Este método combina a possibilidade de introduzir uma base de funções com a característica do problema estudado com a capacidade de poder atuar diretamente no nó, descartando a necessidade de termos de acoplamento como a função rampa exemplificada na seção 3.3.2 desta dissertação. O método foi desenvolvido por (DUARTE; ODEN, 1996) usando funções do MQM, mas devido ao princípio da partição da unidade, outras funções poderiam ser utilizadas, como o MEF ou MIP.

Assim como em casos anteriores, o enriquecimento efetuado neste método

é oriundo de uma família de funções que represente o caráter do fenômeno estudado por meio de uma base de funções linearmente independente.

Para efetuar o enriquecimento seleciona-se um conjunto de nós ao redor da ponta da trinca e se atribuem características de funções enriquecidas. Os demais permanecem como nós comuns sendo associados a funções de forma  $\phi_i$  da família de funções primárias, tais como a de Shepard, MEF ou MIP. A figura 23 indica como é feita a distribuição dos nós.



**Figura 23:** Distribuição de nós comuns e enriquecidos nas proximidades da trinca.

Supondo-se a aplicação das funções de forma  $\phi_i$  do MIP, tem-se para os nós comuns a aproximação dada por:

$$u^h = \sum_{i=1}^{n_{mip}} \phi_i(x) u_i \quad (4.12)$$

onde  $n_{mip}$  é o número de funções pertencentes à base do MIP. Se utilizada base quadrática, essas totalizam seis.

Para os nós da região enriquecida, supondo-se  $n_{enr}$  como o número de funções de enriquecimento, tem-se que seu deslocamento é expresso por:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n_{mip}} \phi_i(x) u_i + \sum_{i=1}^{n_{mip}} \sum_{I=1}^{n_{enr}} u_{iI} \phi_i(x) L_I(x) \quad (4.13)$$

Vale ressaltar que a quantidade de variáveis por nó cresce consideravelmente. Supondo-se quatro funções de enriquecimento, o deslocamento aproximado passa a ser representado por seis variáveis oriundas do MIP original mais quatro vezes seis oriundas do enriquecimento, totalizando 30 variáveis para representar um deslocamento em uma só direção. As variáveis adicionadas  $u_{iI}$  não necessariamente apresentam significado físico, ou seja, apesar de sua combinação representar deslocamento, individualmente, essas não têm representação

física. Essas variáveis são denominadas de variáveis generalizadas. Apesar do aumento no número de variáveis em cinco vezes e da necessidade de concatená-las nos nós enriquecidos, a metodologia de programação não é modificada em demasia, devendo-se somente incluir na matriz **B** novos termos relacionados ao enriquecimento. Na equação expressão abaixo é apresentado o deslocamento de um nó enriquecido utilizando-se o MIP como função primária considerando-se apenas uma função enriquecida  $L_1$ :

$$u^h = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_3\phi_3 + u_4\phi_4 + u_5\phi_5 + u_6\phi_6 + \\ + u_{11}\phi_1L_1 + u_{21}\phi_2L_1 + u_{31}\phi_3L_1 + u_{41}\phi_4L_1 + u_{51}\phi_5L_1 + u_{61}\phi_6L_1 \quad (4.14)$$

Os tipos de enriquecimento aplicados no estudo de trincas são chamados de enriquecimento de ponta de trinca e enriquecimento salto. O enriquecimento de ponta de trinca utiliza funções que são base do campo de deslocamento analítico na ponta de uma trinca. São essas indicadas na expressão seguinte, sendo a abertura da trinca caracterizada pelo termo  $\text{sen}(\theta/2)$  que vale +1 e -1 para  $\theta$  igual a  $\pi$  e  $-\pi$ , respectivamente:

$$\mathbf{L} = [\sqrt{r} \text{sen}(\frac{\theta}{2}), \sqrt{r} \text{cos}(\frac{\theta}{2}), \sqrt{r} \text{sen}(\frac{\theta}{2}) \text{sen}\theta, \sqrt{r} \text{cos}(\frac{\theta}{2}) \text{sen}\theta]^T \quad (4.15)$$

A outra função de enriquecimento é a função salto, sendo utilizada para representar o corpo da trinca, já que não destaca com precisão a posição em que a sua ponta se localiza. A função salto tem por característica variar de modo binário entre -1 e +1 dependendo de que lado da trinca se está, permitindo, assim, gerar matematicamente a abertura da trinca. A função salto é representada por:

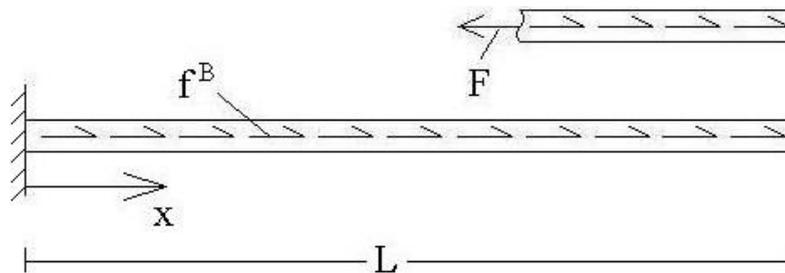
$$S(x, y) = 1 \text{ de um lado da trinca} \\ S(x, y) = -1 \text{ do outro lado da trinca} \quad (4.16)$$

## 5 RESULTADOS

### 5.1 Casos unidimensionais

De modo a avaliar as metodologias do MGSE e do MIP em aplicações unidimensionais, foram considerados casos de barras com força distribuída e força pontual, comparando-se os resultados com as respectivas soluções analíticas.

Foi considerado, primeiramente, o caso de uma barra de comprimento  $L$ , seção reta de área  $A$  e módulo de elasticidade  $E$ , engastada em uma extremidade e solicitada por uma força distribuída  $f^B$  constante ao longo de seu comprimento conforme representado na figura 24. Na mesma figura,  $F$  representa o esforço normal interno ao longo da barra.



**Figura 24:** Barra com força distribuída

Calcula-se  $F$  a partir da integral:

$$F = \int_x^L f^B dx = f^B(L - x) \quad (5.1)$$

Para esse caso, o deslocamento analítico  $u(x)$  é expresso por:

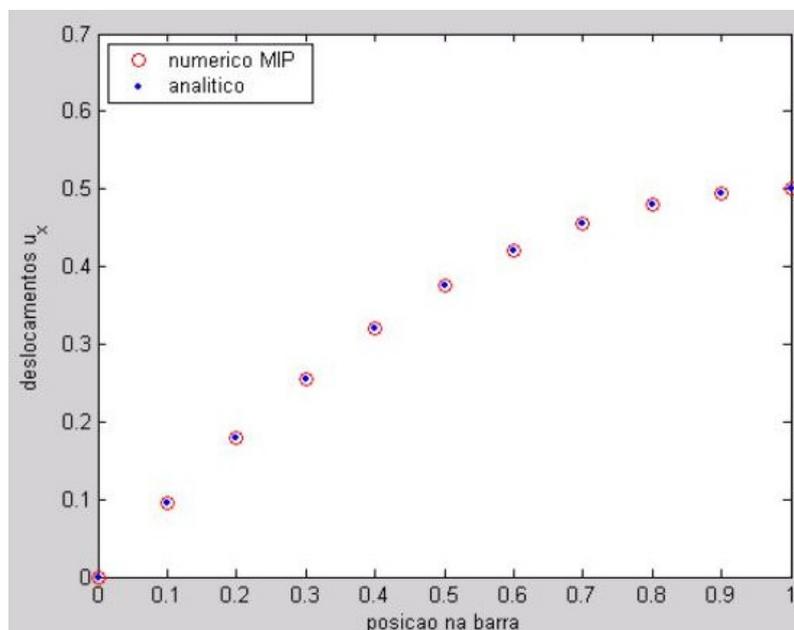
$$u(x) = \frac{f^B}{EA} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

De modo a facilitar as comparações numéricas, valor unitário é atribuído às variáveis  $E$ ,  $A$ ,  $L$  e  $f^B$ , resultando na expressão:

$$u(x) = \left( x - \frac{x^2}{2} \right) \quad (5.2)$$

Na solução numérica obtida pelo método de interpolação de ponto, utilizou-se uma base linear unidimensional, com a distribuição de 11 nós igualmente espaçados no domínio e uma malha de integração idêntica com um ponto de Gauss por célula de integração. Assim, utilizando-se  $s_{máx} = 1$ , reproduziu-se com exatidão a solução analítica conforme mostra a figura 25, onde a solução

numérica é representada pelos círculos vermelhos e a analítica pelos pontos azuis.



**Figura 25:** Comparativo entre a solução analítica e a numérica do MIP para força  $f^B(x)$  constante.

Refazendo-se o processo analítico para uma força distribuída  $f^B$  proporcional à posição ao longo da barra expressa por  $f^B(x) = x$ , obtém-se o deslocamento em função da posição  $x$ :

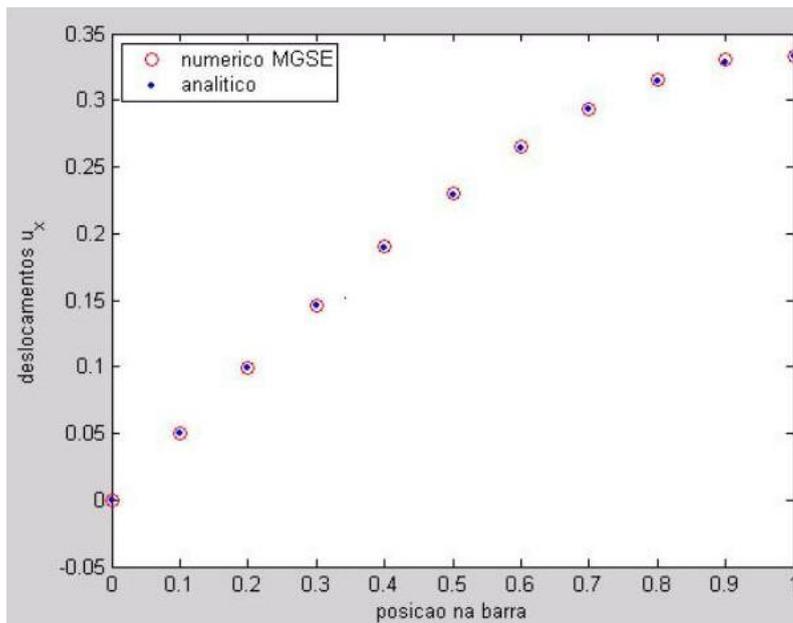
$$u(x) = \frac{1}{EA} \left( \frac{L^2 x}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

Para E, A e L são unitários, tem-se:

$$u(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} \quad (5.3)$$

Mantendo-se a quantidade de nós do caso anterior, a base linear e uma malha nodal idêntica à malha de integração, o MGSE reproduziu a solução analítica conforme indicado na figura 26.

Com relação à aplicação de forças concentradas, o MGSE e o MIP apresentam trabalhos de programação semelhantes, a despeito do primeiro não ter uma característica interpolante. Se houver uma coincidência entre a posição de um nó e o local de aplicação da força, o componente da força nodal é adicionado diretamente ao vetor de força  $\mathbf{F}$  que compõe sistema linear  $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ . Caso contrário, ambos os métodos devem ser resolvidos pela distribuição da força nos nós adjacentes ao ponto de aplicação, por meio de sua multiplicação pela função de



**Figura 26:** Comparativo entre a solução analítica e a numérica do MGSE para força  $f^B(x)$  proporcional à posição.

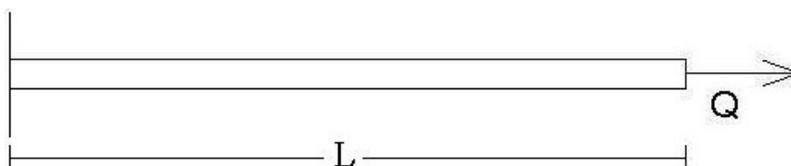
forma respectiva.

Analisando-se o caso de aplicação de força concentrada na extremidade indicado na figura 27, a solução analítica é dada pela equação:

$$u(x) = \frac{Qx}{EA}$$

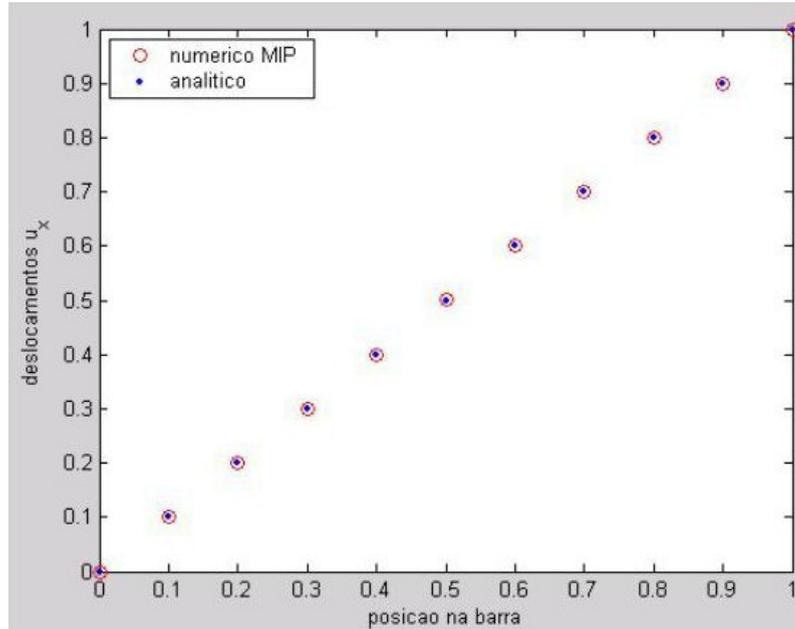
Para Q, A e E unitários, tem-se:

$$u(x) = x \quad (5.4)$$



**Figura 27:** Força concentrada na extremidade.

Mantendo-se a abordagem de um ponto de Gauss por célula e de 11 nós igualmente espaçados, o MIP reproduz a solução analítica conforme explicitado na figura 28.



**Figura 28:** Força unitária na extremidade com 11 nós igualmente espaçados, utilizando-se o MIP.

Caso a força seja aplicada no meio da barra, como retratado na figura 29, tem-se que a solução analítica é dada por:

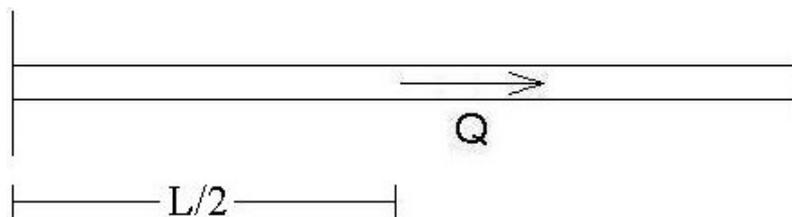
$$u(x) = \frac{Q}{EA}x \quad \text{se } x \leq \frac{L}{2}$$

$$u(x) = \frac{QL}{2EA} \quad \text{se } x > \frac{L}{2}$$

Para Q, A, L e E unitários, tem-se:

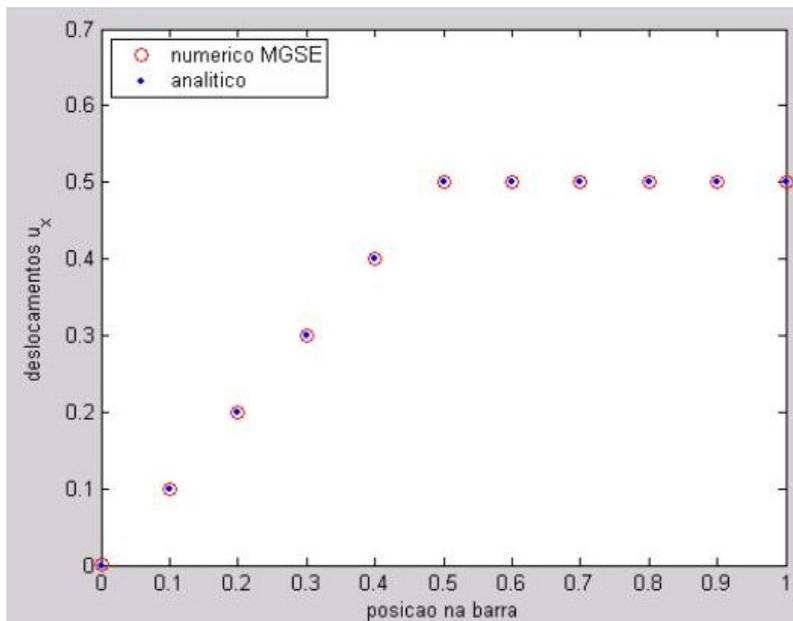
$$u(x) = x \quad \text{se } x \leq \frac{1}{2} \tag{5.5}$$

$$u(x) = \frac{1}{2} \quad \text{se } x > \frac{1}{2}$$

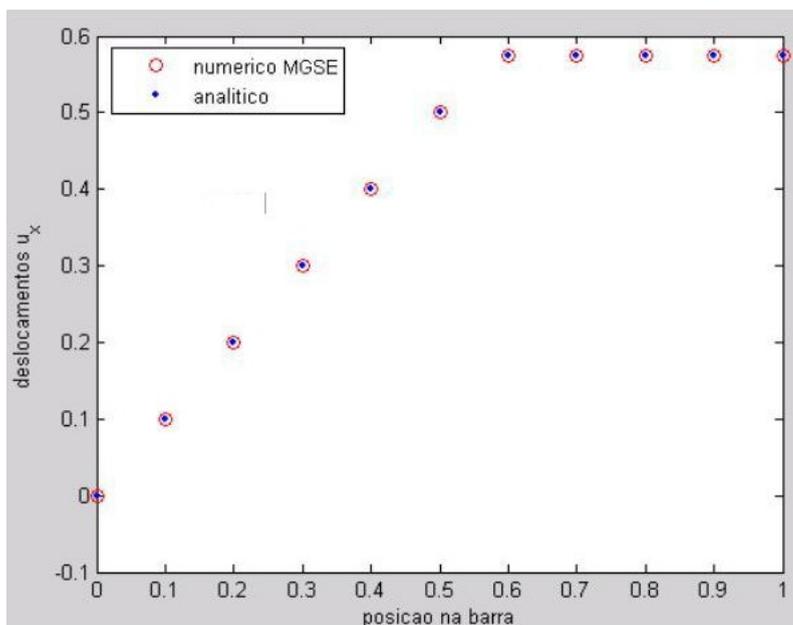


**Figura 29:** Força concentrada no ponto médio

Este caso aborda novamente a aplicação direta da força em um nó, no entanto, utilizou-se o MGSE na mesma configuração nodal e de integração, com um ponto de Gauss por subdomínio. O resultado é mostrado na figura 30.



**Figura 30:** Força unitária no ponto médio da barra utilizando-se o MGSE.



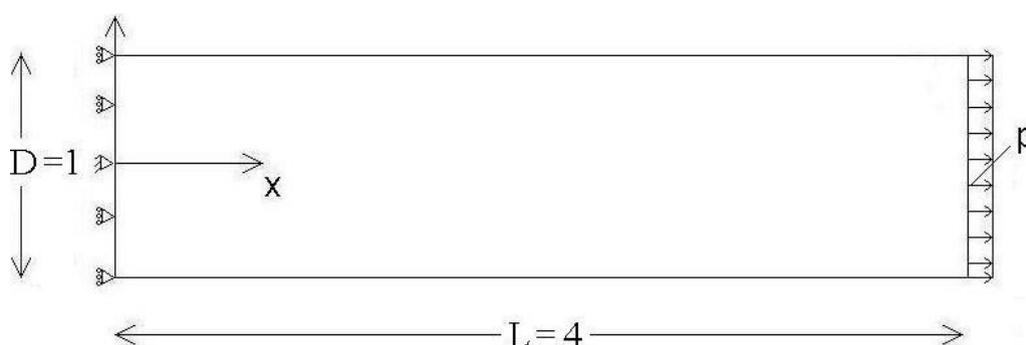
**Figura 31:** Força unitária aplicada fora das posições nodais utilizando-se o MGSE.

Aplicando-se uma força em uma posição não nodal, a função  $\phi$  deve ser avaliada nessa posição e em seguida deverá ser efetuada a multiplicação da força de modo a realizar a sua distribuição para os nós das proximidades. Fazendo-se esse cálculo para o MGSE e para o MIP de uma força na posição 0,575, a distribuição da força no sexto subdomínio é dada por 0,25 e 0,75 para o sexto e o sétimo nós, respectivamente, para os dois métodos. Na figura 31 é

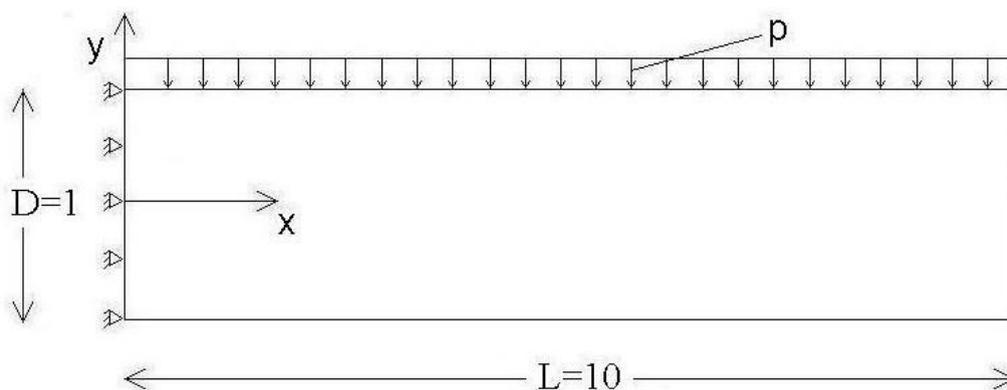
apresentado o gráfico dessa análise, onde mais uma vez é mostrado o desempenho do MGSE. O resultado do MIP não foi apresentado nesta dissertação mas é similar.

## 5.2 Casos bidimensionais

De modo a avaliar os métodos sem malha em análises bidimensionais, foram efetuados três tipos de carregamento em chapas de comprimento  $L$  e Largura  $D$  conforme indicado nas figuras 32, 33 e 34. Para facilidade de cálculos, foi atribuída espessura unitária a todos os casos, resultando em um momento de inércia da seção transversal de  $I = D^3/12$ .

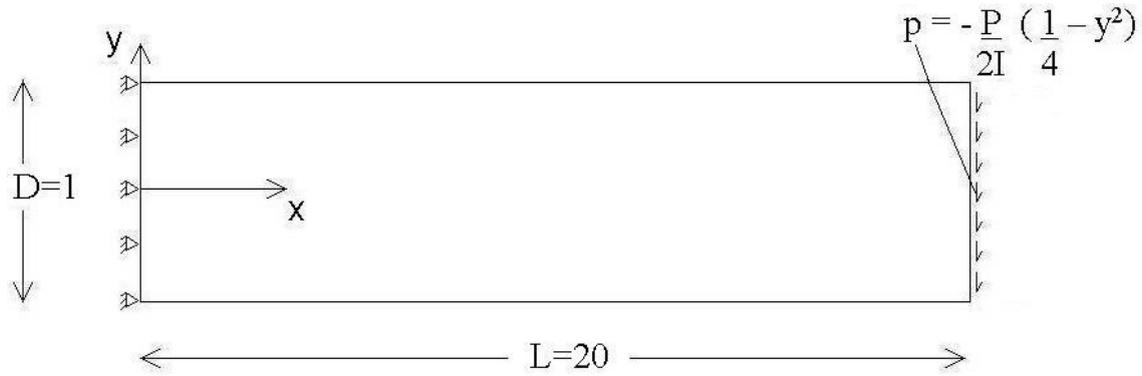


**Figura 32:** Chapa fixa na origem e sobre roletes em  $x$  igual a zero com força distribuída  $p$  constante aplicada no contorno direito.



**Figura 33:** Chapa engastada com força distribuída  $p$  constante aplicada no contorno superior.

Para a resolução numérica dos casos apresentados, foram criadas duas malhas separadas, a de distribuição nodal e a de integração. As malhas foram geradas de maneira similar ao exemplo apresentado na figura 35, contendo oito divisões no comprimento e quatro divisões na largura. De acordo com essa distribuição, esta malha tem nove nós no comprimento e cinco na largura, totalizando 45 nós.



**Figura 34:** Chapa engastada com força distribuída  $p$  aplicada no contorno direito.

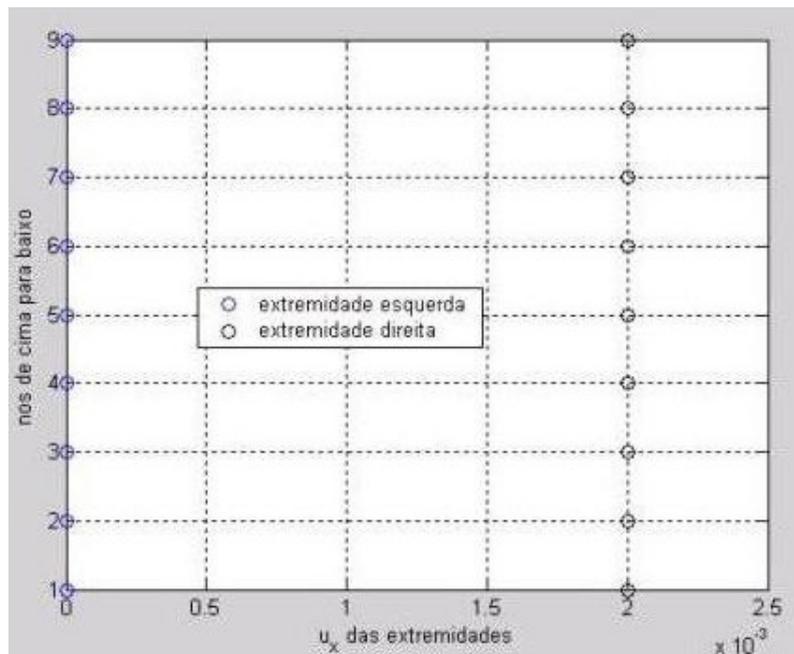
1	6	11	16	21	26	31	36	41
2	7	12	17	22	27	32	37	42
3	8	13	18	23	28	33	38	43
4	9	14	19	24	29	34	39	44
5	10	15	20	25	30	35	40	45

**Figura 35:** Exemplo de distribuição de nós coincidentes com a malha de integração.

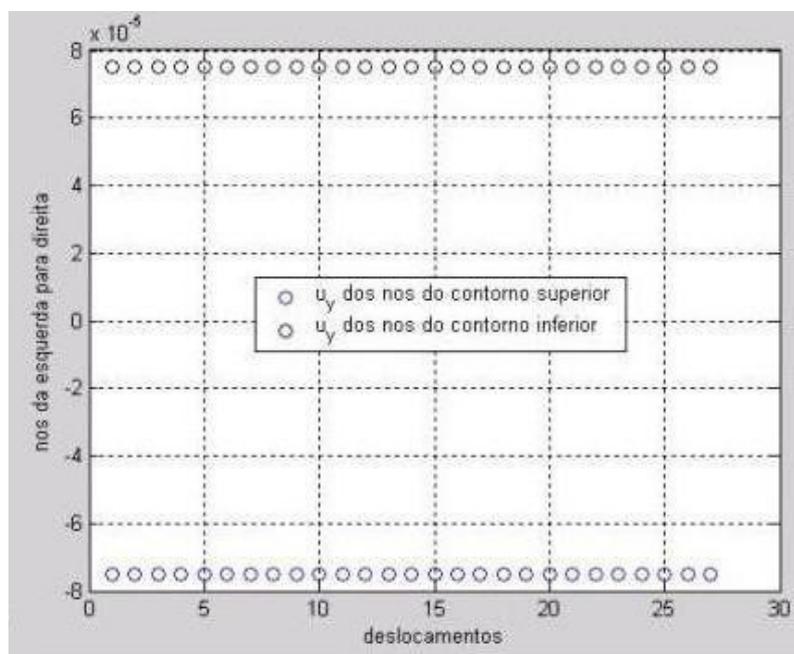
Utilizando-se uma base linear no método de interpolação de ponto para o caso indicado na figura 32, foi aplicada uma distribuição regular de nós de  $27 \times 9$  e uma malha de integração idêntica para obtenção dos resultados. Na malha de integração, foram utilizados um total de 16 pontos de Gauss por célula, ou seja, quatro pontos de Gauss na direção  $x$  e quatro na direção  $y$ . Assim, considerando-se o módulo de Young  $E$  como  $2,0 \times 10^6$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$  0,3 e a força distribuída  $p$  como 1000, foram obtidos como resultados numéricos para o deslocamento na direção  $x$  dos nós do contorno direito e para o deslocamento na direção  $y$  dos nós dos contornos inferior e superior, os valores de  $2,0 \times 10^{-3}$  e  $7,5 \times 10^{-5}$ , respectivamente. Esses valores, apresentados nas figuras 36 e 37, estão em conformidade com o que se obtém com a teoria de chapa em estado plano de tensão, como pode ser visto pela solução analítica para os deslocamentos  $u_{xx}$  e  $u_{yy}$  do primeiro caso bidimensional descritos por:

$$u_{xx} = pL/E = 2,0 \times 10^{-3}$$

$$u_{yy} = -\nu pD/(2E) = -7,5 \times 10^{-5}$$



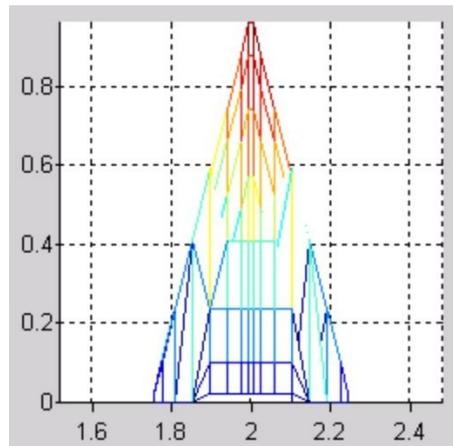
**Figura 36:** Deslocamentos para o primeiro caso bidimensional utilizando-se o MIP com base linear. Em preto estão representados os deslocamentos na direção  $x$  dos nós da extremidade livre e, em azul, os deslocamentos dos nós restritos.



**Figura 37:** Deslocamentos para o primeiro caso bidimensional utilizando-se o MIP com base linear. Em preto estão representados os deslocamentos na direção  $y$  dos nós do contorno inferior e, em azul, os do contorno superior.

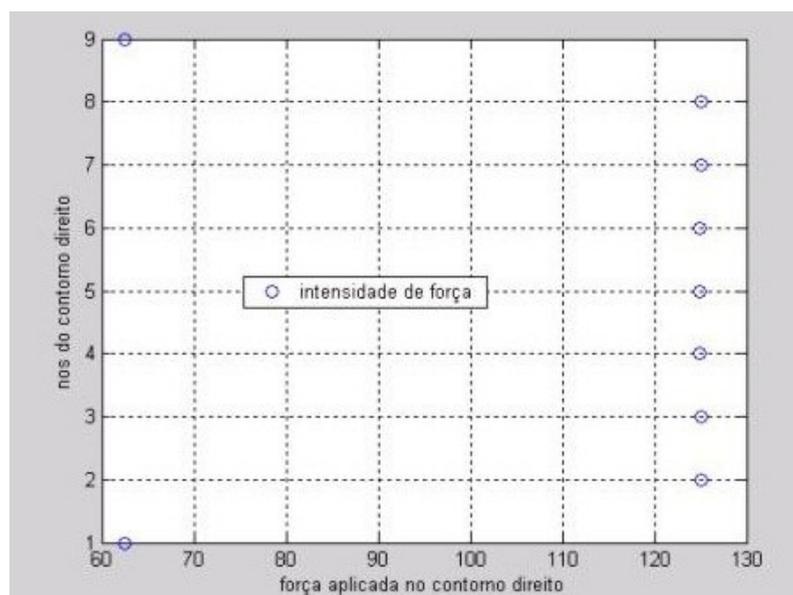
Fazendo-se uso de uma base linear do MIP, são necessários três pontos para a composição da matriz momento  $\mathbf{P}_0$  e posterior confecção da função de

forma. Na sua confecção, só ocorre o caso crítico de não inversão de  $\mathbf{P}_0$  se os três nós selecionados estão alinhados. Essa situação é facilmente resolvida pela substituição do nó mais afastado do subdomínio pelo nó seguinte mais próximo, não havendo necessidade de eliminação de linhas e colunas. A figura 38 mostra a função de forma efetuada a partir de uma base linear.

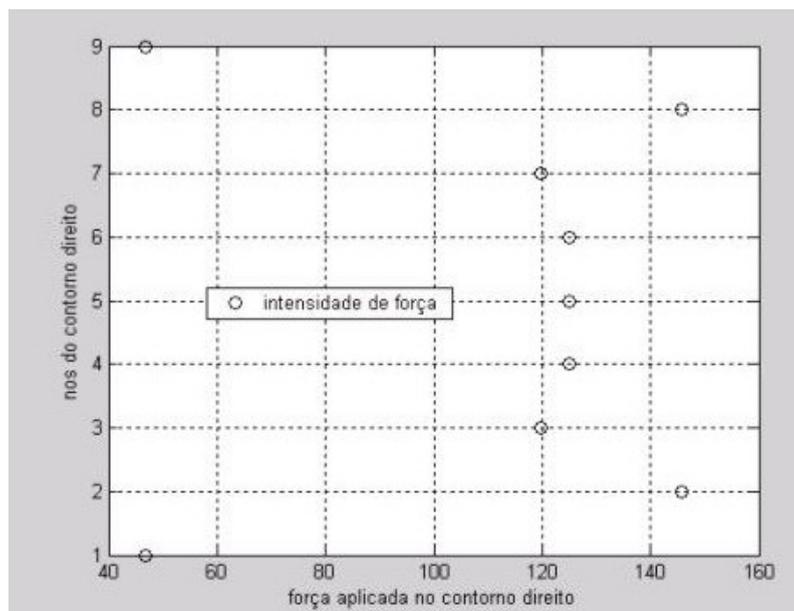


**Figura 38:** Função de Forma MIP com base linear.

Citando-se novamente o problema representado pela figura 32 e calculando a solução utilizando-se a base quadrática completa do MIP, obteve-se também o resultado exato. Vale destacar a diferença quanto ao perfil de aplicação de força no contorno direito para base quadrática e para base linear, conforme indicam as figuras 39 e 40.



**Figura 39:** Força obtida a partir de função de forma do MIP com base linear.



**Figura 40:** Força obtida a partir de função de forma do MIP com base quadrática.

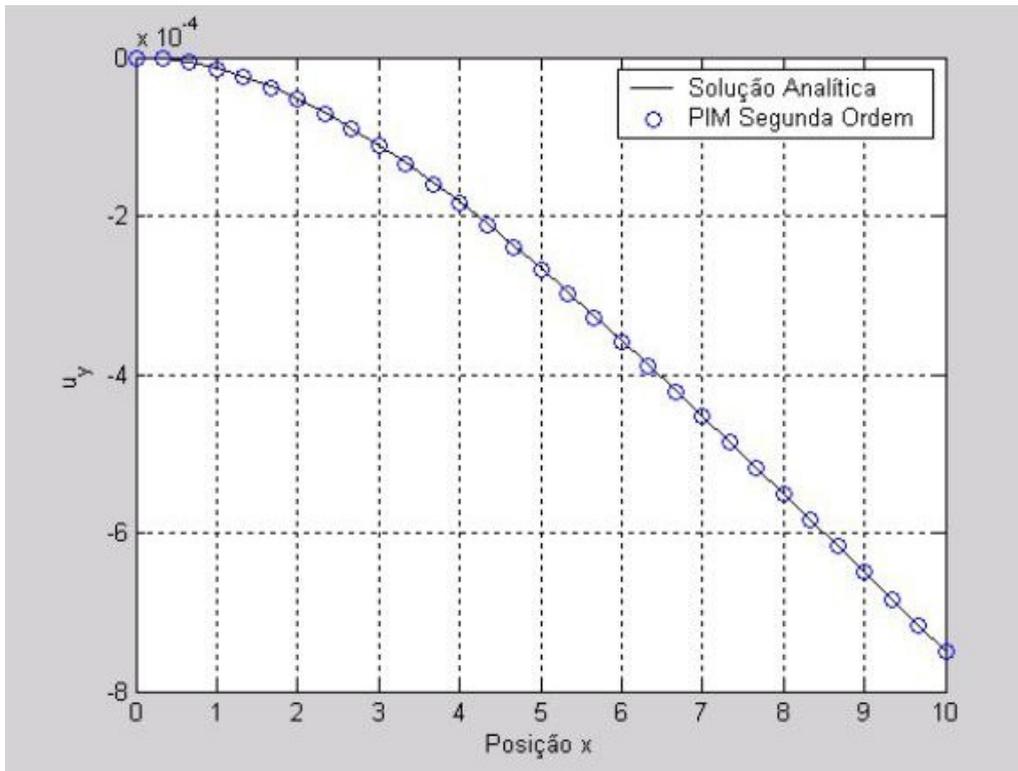
Para a resolução do caso representado na figura 33 utilizou-se o MIP com funções de forma de base quadrática completa, aplicando-se uma distribuição regular de nós de  $31 \times 3$  e uma malha de integração idêntica. Utilizou-se, ainda, a mesma quantidade de pontos de Gauss por quadratura de integração do exemplo anterior, ou seja, 16 pontos de Gauss. Atribuindo-se ao módulo de elasticidade e ao coeficiente de Poisson os valores de  $2,0 \times 10^8$  e 0,3; ao comprimento e largura da chapa valores de 10 e 1, obtém-se, para uma força distribuída  $p$  de valor de 10, o deslocamento da linha média da chapa conforme indicado na figura 41. Nessa figura, a linha contínua de cor preta representa a solução analítica e a linha formada pelos círculos azuis representa a solução numérica.

No cálculo da solução analítica do caso apresentado na figura 33, foi considerado o modelo de Bernoulli-Euler para uma viga engastada. Calculando-se o momento fletor  $M(x)$  em relação ao ponto A a uma distância  $x$  do engaste, conforme representado na figura 42, obtém-se a equação:

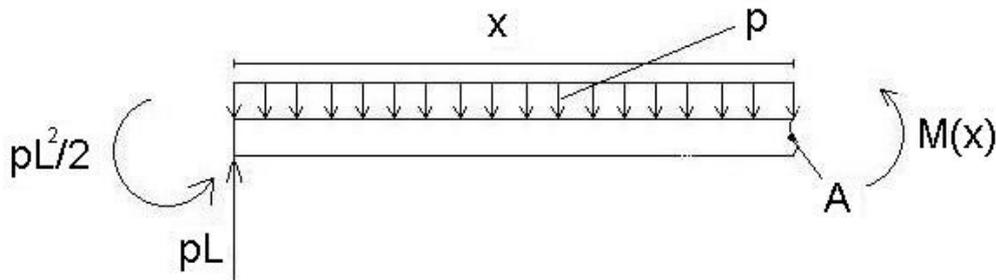
$$M(x) = \frac{-px^2}{2} + pLx - \frac{pL^2}{2} \quad (5.6)$$

De acordo com a teoria de Bernoulli-Euler para um material com módulo de elasticidade  $E$  e coeficiente de Poisson  $\nu$ , o deslocamento transversal da linha média  $u_y$  da viga é descrito conforme a equação:

$$EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = M(x) \quad (5.7)$$



**Figura 41:** Deslocamento da linha média da chapa representada na figura 33.



**Figura 42:** Diagrama para cálculo do momento fletor em relação ao ponto A.

Pela combinação das expressões 5.6 e 5.7 tem-se:

$$\frac{d^2 u_y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left( \frac{-px^2}{2} + pLx - \frac{pL^2}{2} \right) \tag{5.8}$$

Integrando-se a equação 5.8 obtém-se:

$$\frac{du_y}{dx} = \frac{1}{EI} \left( \frac{-px^3}{6} + \frac{pLx^2}{2} - \frac{pL^2x}{2} \right) + c_1;$$

A constante de integração  $c_1$  é zero pois a viga está engastada. Integrando-se pela segunda vez a equação 5.8 obtém-se o deslocamento  $u_y$ .

$$u_y = \frac{1}{EI} \left( \frac{-px^4}{24} + \frac{pLx^3}{6} - \frac{pL^2x^2}{4} \right) + c_2$$

A constante  $c_2$  é nula, pois para o caso explicitado o deslocamento  $u_y$  é zero em  $x = 0$ . Assim, o deslocamento  $u_y$  é descrito pela equação:

$$u_y = \frac{1}{EI} \left( \frac{-px^4}{24} + \frac{pLx^3}{6} - \frac{pL^2x^2}{4} \right) \quad (5.9)$$

Aplicando-se à solução anterior e ao momento de inércia  $I = D^3/12$  os valores:  $L = 10$ ;  $D = 1$ ;  $E = 2,0 \times 10^8$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $p = 10$ , obtém-se:

$$u_y(L) = -7,5 \times 10^{-4}$$

O MIP com funções de forma de segunda ordem apresenta como dificuldade o fato de ser mais comum o posto da matriz momento  $\mathbf{P}_0$  ser menor que seis, tornando-a não inversível. A impossibilidade de inversão da matriz momento advém do número insuficiente de suas linhas linearmente independentes de uma das coordenadas cartesianas para um número excessivo de coeficientes de interpolação na mesma direção. Vale ressaltar que as linhas de  $\mathbf{P}_0$  estão associadas aos nós escolhidos, e as colunas, aos monômios, ou seja, não necessariamente é efetuada a eliminação da mesma linha e coluna, podendo ser eliminada a linha 5 correspondendo ao quinto nó mais afastado do ponto de Gauss avaliado e a coluna 4 correspondendo ao monômio  $x^2$ , indicando a deficiência no número de coordenadas  $x$ .

Duas estratégias foram adotadas de modo a contornar o problema de não inversão da matriz  $\mathbf{P}_0$ . Primeiramente, foi efetuada uma medida paliativa de modo a contornar o problema da inversão sem perda de monômios ou nós, realizando-se uma determinada quantidade de trocas do último nó. O "teto" de trocas foi estabelecido como quatro, sendo relativamente baixo, haja vista a possibilidade de ocorrer o problema simultaneamente em outros nós ou monômios e as trocas serem irrelevantes. A segunda estratégia foi aplicada seguida à primeira e consiste em eliminar os nós e os monômios que causam deficiência no posto de  $\mathbf{P}_0$ . O programa foi desenvolvido de modo a dar preferência de eliminação dos nós mais afastados e dos monômios de ordem mais alta.

Uma alternativa interessante de burlar o problema de eliminação de nós e monômios é utilizar um arranjo randômico dos nós no interior do domínio. Ao contrário de um arranjo regular, onde ocorrem valores de coordenadas nodais repetidas, essa prática elimina quase que totalmente a possibilidade matriz momento  $\mathbf{P}_0$  singular, mas apresenta como desvantagem a não regularidade da

malha, o que pode ser atenuada por uma pequena oscilação dos pontos nodais. Os únicos nós que foram mantidos em um arranjo regular são os do contorno, de modo a garantir a cobertura correta do seu perfil e não prejudicar a aplicação das condições de contorno de força e deslocamento.

Utilizando-se o MIP com distribuição nodal de posicionamento randômico para a resolução do caso representado pela figura 34, alterou-se o posicionamento dos nós na ordem de centésimo nas direções  $x$  e  $y$ . Para se fazer analogia desse caso com o comportamento de uma viga carregada com força  $P$  em sua extremidade, utilizou-se uma força distribuída como expressa a equação:

$$p = -\frac{P}{2I}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) \quad (5.10)$$

Assim, a integral da força ao longo deste contorno deve resultar em:

$$\int p dy = -P$$

Fazendo-se a resolução analítica similar à do caso representado na figura 33 chega-se à equação:

$$u_y = -\frac{P}{EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \quad (5.11)$$

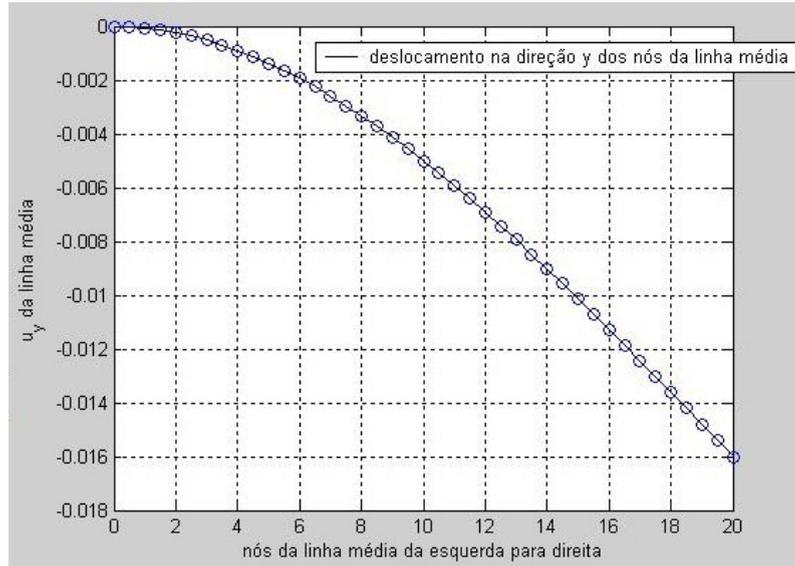
$$u_y(x = L) = -\frac{P}{EI}\left(\frac{3L^3}{6} - \frac{L^3}{6}\right) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

Aplicando-se à solução anterior e ao momento de inércia  $I = D^3/12$  os valores:  $L = 20$ ;  $D = 1$ ;  $E = 2 \times 10^8$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $P = 100$ , obtém-se:

$$u_y = -0,016$$

Como a referência (LIU; GU, 2003) não deixa claro se a quantidade de nós no domínio de influência é limitada a seis, optou-se como uma outra tentativa de entender o método de interpolação de ponto, incluir quantos nós fossem possível dentro da distância de duas vezes o espaçamento nodal nas direções  $x$  e  $y$ . Assim, a base de funções fica livre para inclusão de maior número de nós dentro deste intervalo. Limitou-se superiormente o número de nós a 21 unidades, podendo-se assim incluir até funções de 5ª ordem. Aplicando-se esta estratégia para o terceiro caso, obteve-se o deslocamento da linha média explicitado na figura 43.

De modo a avaliar o método de Galerkin sem elementos, foi solucionado novamente caso representado pela figura 32 e, para facilidade dos cálculos,

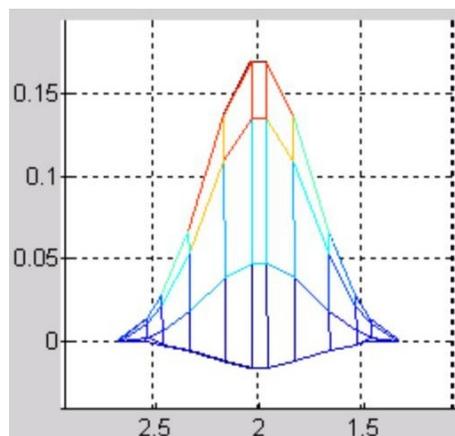


**Figura 43:** Deslocamento da linha média do caso representado na figura 34 utilizando-se o MIP com base até 5ª ordem.

foram repetidos os valores atribuídos ao módulo de Young, coeficiente de Poisson e de intensidade de carregamento aplicados à solução do MIP linear. Nessa resolução pelo MGSE foram utilizados domínios de influência circulares e uma base quadrática completa, além da geração da função peso a partir de uma função exponencial. A função exponencial utilizada é apresentada na equação seguinte, fazendo com que as funções de forma apresentem o perfil indicado na figura 44.

$$w(s) = \frac{e^{-(s/(c s_{máx}))^2} - e^{-(s_{máx}/(c s_{máx}))^2}}{1 - e^{-(s_{máx}/(c s_{máx}))^2}}, \text{ para } s \leq s_{máx} \quad (5.12)$$

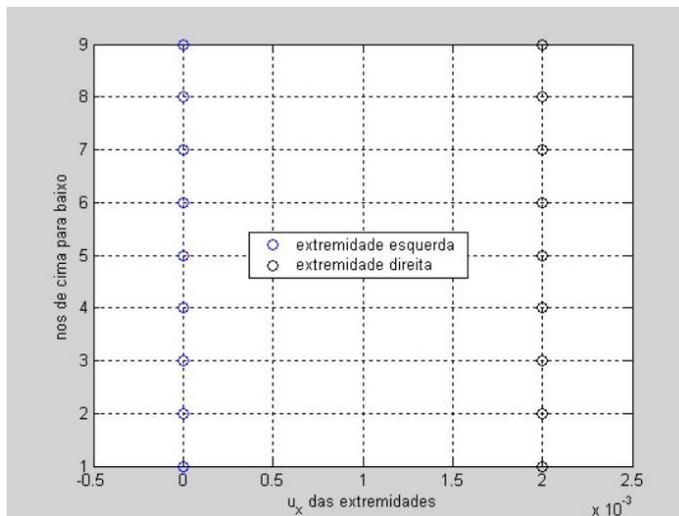
$$w(s) = 0, \text{ para } s > s_{máx}$$



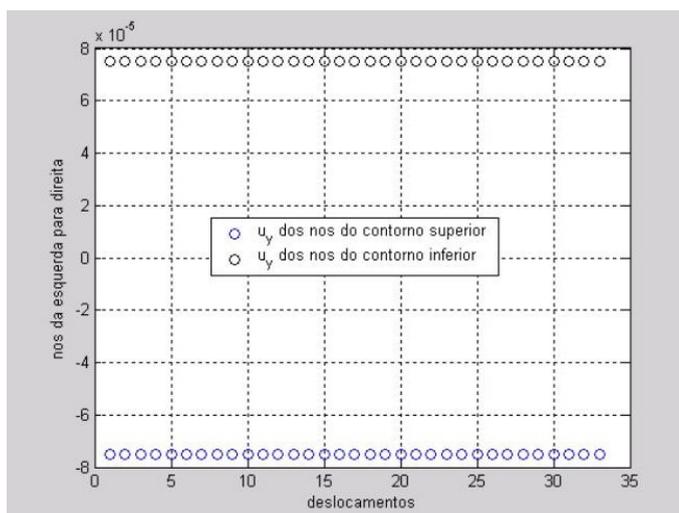
**Figura 44:** Função de Forma MGSE gerada a partir de base quadrática e de uma função exponencial.

Na equação 5.12,  $c$  pode variar no intervalo de 1 a 2, mas atribuiu-se o valor unitário nas resoluções desta dissertação.

Nessa aplicação do método de Galerkin sem elementos foram utilizadas malhas de pontos nodais e de integração de  $33 \times 9$  e  $17 \times 5$ , respectivamente, distribuindo 16 pontos de Gauss por célula de integração. Foi dado ao  $s_{máx}$  o valor de 3,5 vezes o comprimento da diagonal do retângulo composto pelos espaçamentos nodais em  $x$  e  $y$ . Os valores encontrados estão representados nas figuras 45 e 46.



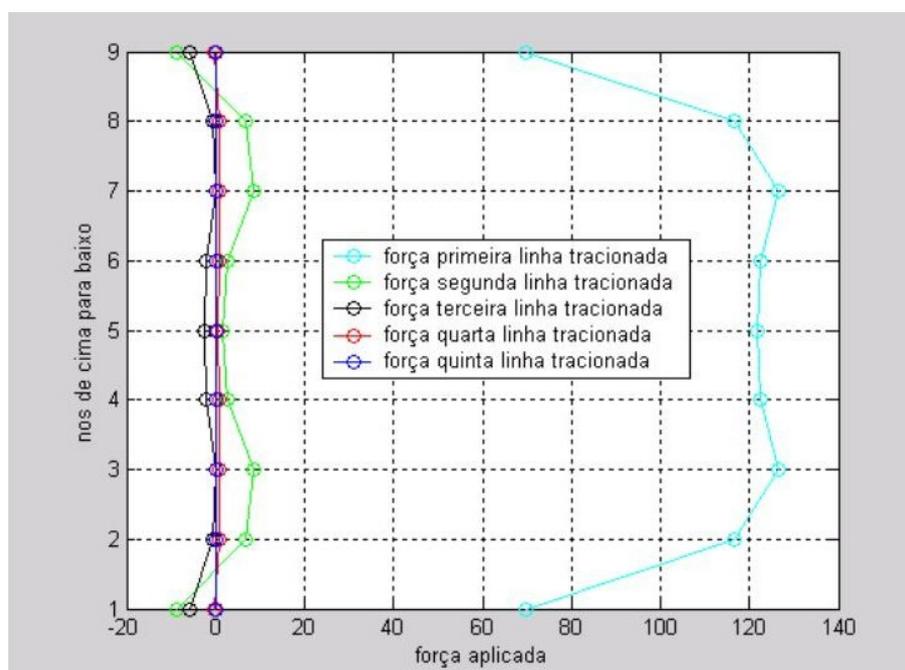
**Figura 45:** Deslocamento na direção  $x$  dos contornos direito (em preto) e esquerdo (em azul) utilizando-se o MGSE com base quadrática e função peso exponencial.



**Figura 46:** Função de forma gerada pelo MGSE a partir de uma função peso exponencial.

Em se considerando o Anexo B da referência (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998) em que a função de forma é aplicada diretamente sobre o contorno e

atua inclusive em nós interiores ao domínio, tem-se que a força de superfície comporta-se como na figura 47. Nessa figura pode ser observado que os nós da primeira à quinta linha da malha nodal distantes da superfície receberam parte da distribuição das forças. Vale ressaltar que a soma dos valores do vetor força, como não podia deixar de ser, resulta em 1000 unidades, equivalendo a  $1000 \times 1$  (dimensão  $D \times$  força distribuída  $p$ ).



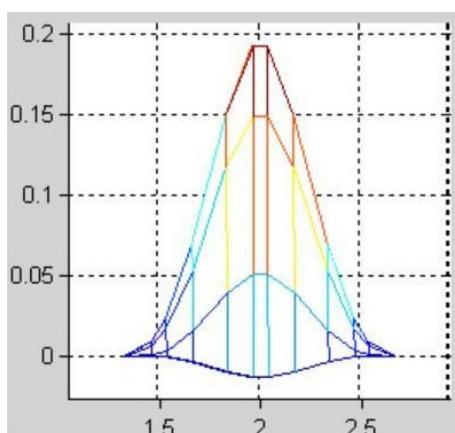
**Figura 47:** Distribuição de força aplicada no contorno para o caso representado na figura 32, utilizando-se o MGSE com base quadrática e função peso exponencial.

Em relação aos deslocamentos prescritos utilizou-se a técnica sugerida no primeiro artigo sobre o MGSE, (LU; GU; BELYTSCHKO, 1994), conforme descrito na equação 3.18, onde  $N_K$  são funções lagrangeanas.

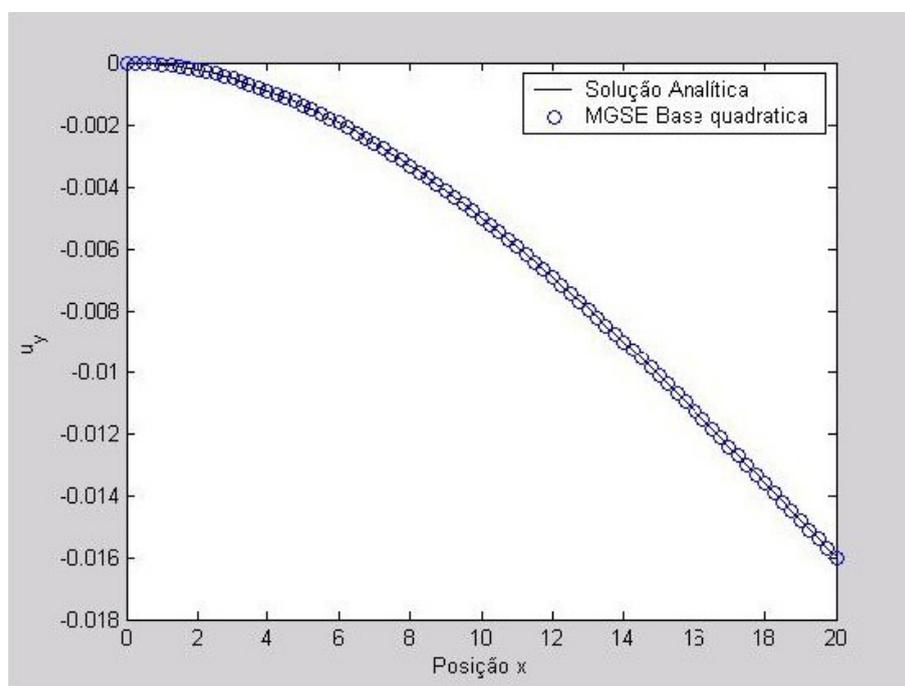
O cálculo de  $G$  pode ser entendido como a divisão para os nós externos ao intervalo avaliado das contribuições das funções de forma  $\phi$ , de acordo com os proporções calculadas pelas funções lagrangeanas. Neste trabalho, as funções lagrangeanas utilizadas foram as de primeira ordem. Para o cálculo de  $q_k$  foi utilizado o pré-conhecimento do deslocamento devido ao efeito gerado pelo coeficiente de Poisson de um ponto na posição  $y$ , ratificando para cada ponto do contorno fixo em  $x = 0$  um deslocamento prescrito  $u$  de  $-vpy/E$ . Nesse caso, o trabalho de imposição dos deslocamentos prescritos aumenta consideravelmente quando comparado com o MIP, onde se efetua, simplesmente, a eliminação de linhas e colunas. Baseado nesse exemplo, pode-se dizer que o trabalho de programação e numérico são maiores no MGSE em virtude da introdução de mais

uma integral a ser calculada para cada deslocamento prescrito.

No último exemplo bidimensional, foi efetuada a resolução do caso representado na figura 34 pelo método de Galerkin sem elementos, utilizando-se a base quadrática completa com função peso formada a partir de *spline* quártica. Na figura 48 é apresentada uma função de forma gerada a partir da utilização de uma *spline* quártica como função peso.



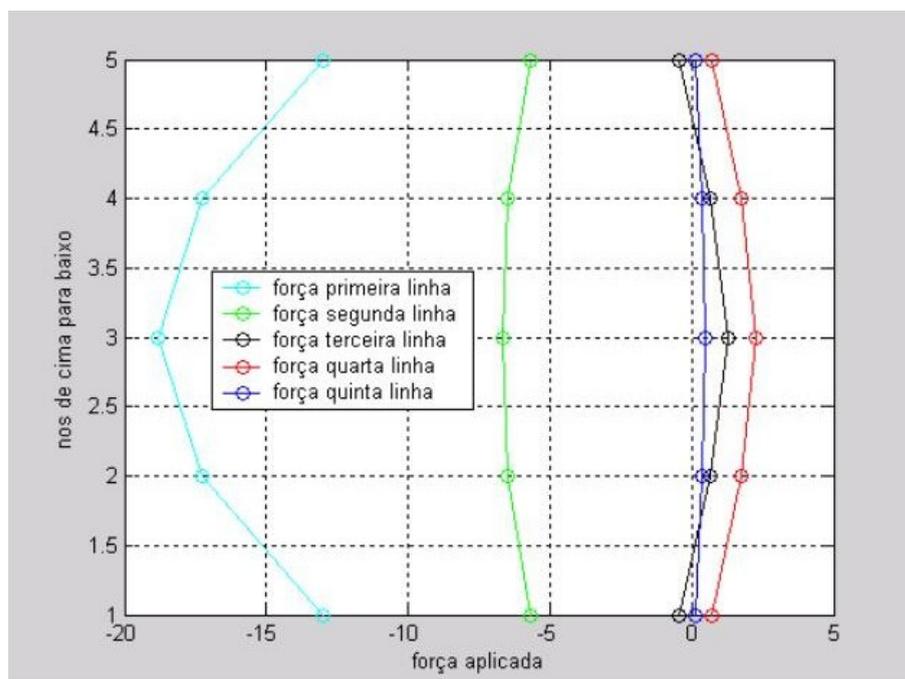
**Figura 48:** Função de forma gerada pelo MGSE a partir de uma função peso de *spline* quártica.



**Figura 49:** Deslocamento na direção  $y$  da linha média da chapa representada na figura 34 utilizando-se o MGSE com base quadrática e função peso *spline* quártica.

Utilizando-se uma malha de distribuição nodal de  $81 \times 5$  e uma malha de integração de  $41 \times 3$  pontos, tem-se na figura 49 a solução para os deslocamentos

da linha média ao longo do comprimento. Mais uma vez utilizou-se uma linha contínua de cor preta para representar a solução analítica e círculos azuis para representar as soluções numéricas.



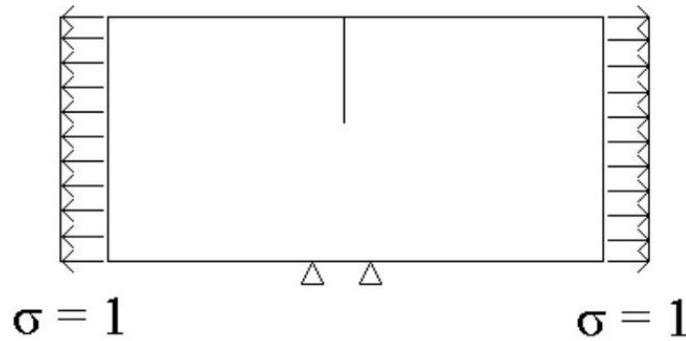
**Figura 50:** Distribuição de força aplicada no contorno para o caso representado na figura 34 utilizando-se o MGSE com base quadrática e função peso *spline* quártica.

A contribuição da força aplicada aos cinco nós do contorno se distribui ao longo da linha do contorno e de quatro fileiras de nós atrás da mesma, conforme representado na figura 50.

### 5.3 Corpos trincados

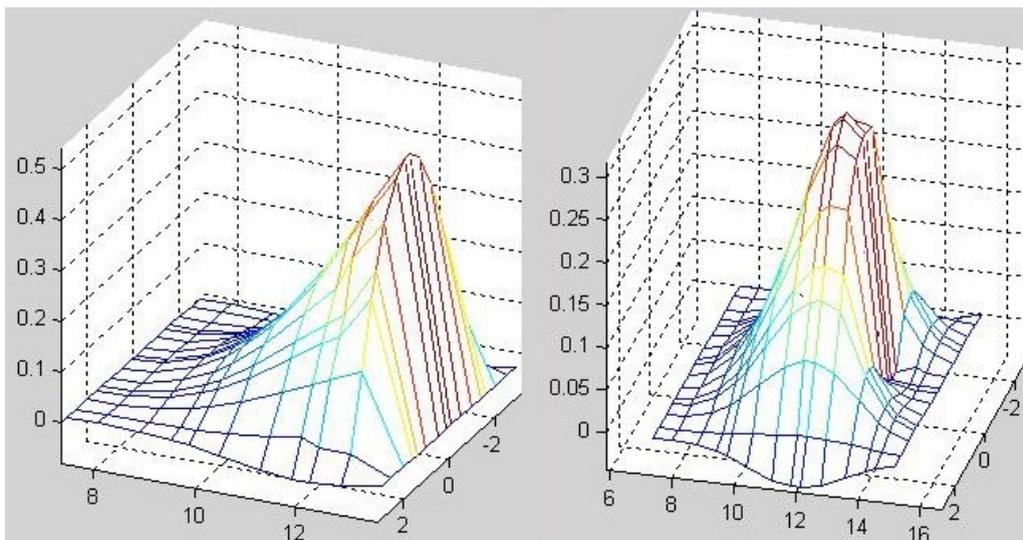
Na resolução de problemas relacionados a corpos trincados foram utilizadas as abordagens: critério de visibilidade e critério de difração no MGSE, além de um breve estudo de enriquecimento do MIP com funções salto e ponta de trinca. Em todas essas aplicações foram utilizados exemplos envolvendo trinca de aresta. A validação dos testes principais foi efetuada calculando-se o valor de  $K_I$  para uma placa trincada com 16 de comprimento e 7 de largura, tracionada por uma força distribuída unitária. Os valores do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson foram 100000 e 0,3, respectivamente. A trinca do tipo aresta é indicada na figura 51, numa localização central em relação ao eixo dos x, variando da aresta superior com ordenada 3,5 até a posição inferior com ordenada

aleatória de 0,32. O valor de  $K_I$  analítico é de 7,74, conforme mostra tabela 3.



**Figura 51:** Corpo trincado sob modo-I de fratura.

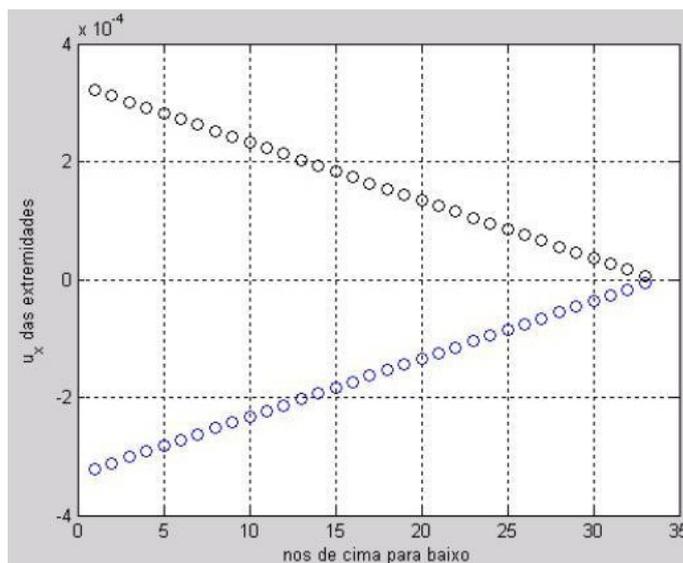
Em relação ao critério de visibilidade e de difração foi aplicado o método de Galerkin sem elementos com malhas de distribuição nodal e de integração coincidentes, sendo a última com 64 pontos de Gauss por célula. Em ambos os critérios, adotou-se como função peso a *spline* de 4<sup>a</sup> ordem apresentada na tabela 1. Os valores de  $K_I$  foram encontrados tendo por base a equação 2.12 que o associa a energia  $J_c$  liberada durante a propagação da trinca e também baseando-se no cálculo numérico da integral representada pela equação 2.41. A figura 52 apresenta os perfis das funções de forma para os critérios de visibilidade e difração considerando-se uma trinca central. Nessa figura pode se notar a diferença da suavização na região da trinca para a função de forma sob o critério de difração em relação ao de visibilidade.



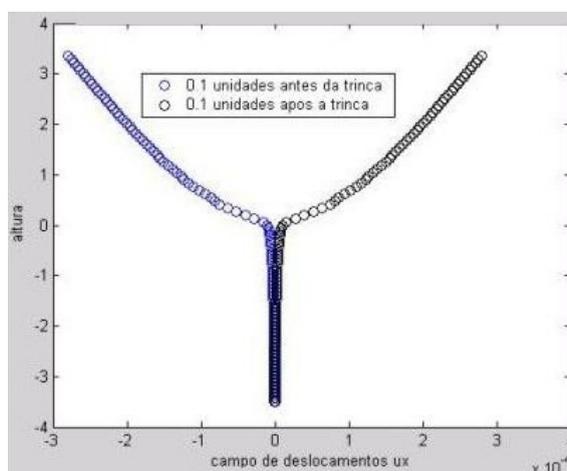
**Figura 52:** Função de forma para MGSE cortada por uma trinca central sob critério de visibilidade (à esquerda) e sob critério de difração (à direita).

Para o critério de visibilidade foi utilizada, primeiramente, uma distribuição

nodal de 64x33 nós, encontrando-se um valor de  $K_I$  de 8,30. Esse valor corresponde a um erro relativo de -7,24%. Nas figuras 53 e 54 estão apresentados os deslocamentos das extremidades da chapa representada na figura 51 e os deslocamentos dos pontos posicionados a 0,1 unidades de comprimento antes e depois da trinca.



**Figura 53:** Deslocamentos das extremidades da chapa pelo critério de visibilidade.

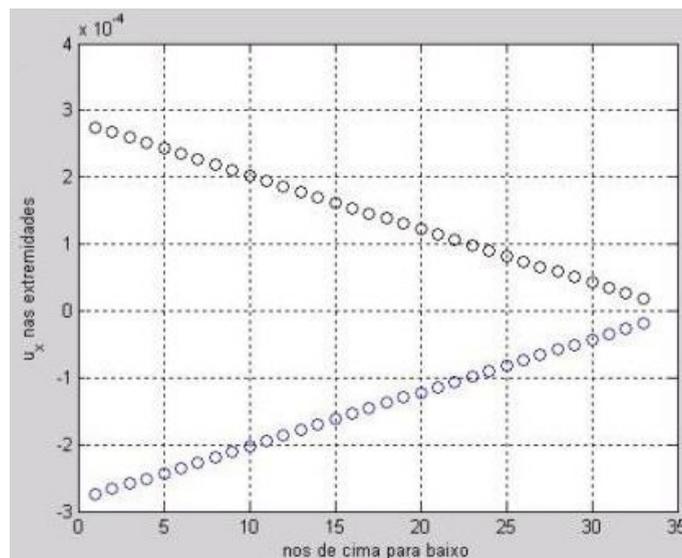


**Figura 54:** Deslocamento de pontos distantes 0,1 unidades de comprimento antes e depois da trinca pelo critério de visibilidade.

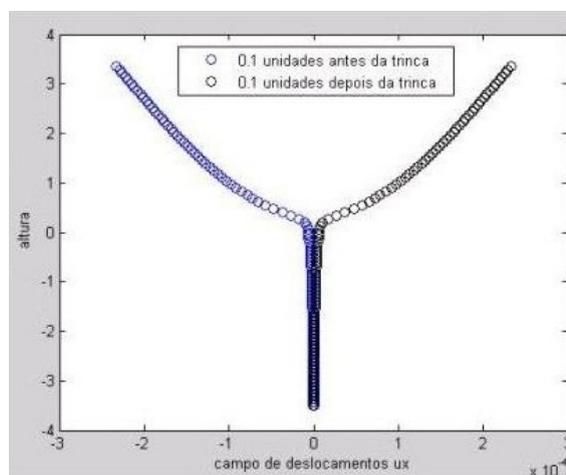
Adotando-se o mesmo procedimento para uma malha mais refinada, com uma distribuição nodal de 122 x 61, tem-se que valor de  $K_I$  encontrado é de 8,01. Esse resultado apresenta um erro relativo de -3,49%, o que indica decaimento do erro.

Repetindo-se o processo com o critério de difração, utilizando-se as mes-

mas malhas, obtém-se para os gráficos indicados nas figuras 55 e 56, os valores de  $K_I$  de 7,29 e 7,49, respectivamente. Esses valores indicam erros, respectivamente, de -5,8% e -3,2%, também apresentando diminuição com o refinamento da malha, além serem menores que os encontrados pelo critério de visibilidade.



**Figura 55:** Deslocamentos das extremidades da chapa pelo critério de difração.



**Figura 56:** Deslocamentos de pontos distantes 0,1 unidades antes e depois da trinca pelo critério de difração.

## 6 CONCLUSÕES

As aplicações dos métodos sem malha nesta dissertação apresentaram resultados satisfatórios quando empregados em casos unidimensionais e bidimensionais, o que não repetiu plenamente quando aplicados ao cálculo de  $K_I$  relacionado ao estudo de trincas. Contudo, como primeira experiência na Faculdade de Engenharia da UERJ, pode-se dizer que se trata de um trabalho desbravador, haja vista a complexidade do assunto.

Fazendo-se um paralelo com MEF, os métodos sem malhas são efetuados de um modo mais complexo e dependente de muitas variáveis simultaneamente. Esta característica, aliada ao aumento no tempo de processamento dos cálculos numéricos, tende a deixar o método menos acessível se comparado à simplicidade dos métodos dos elementos finitos e das diferenças finitas. No entanto, seu entendimento fornece uma visão macroscópica dos métodos tradicionais, permitindo e incentivando novas pesquisas.

Quanto ao método de interpolação de ponto, pode-se afirmar que sua principal virtude está na simplicidade de sua utilização. A facilidade de eliminar linhas e colunas nas aplicações das condições de contorno e o modo de aplicação de forças de superfície têm similaridade com o método dos elementos finitos, sendo bastante familiar ao programador. Por outro lado, a rotina central de resolução sugerida nesta dissertação, denominada algoritmo de triangulação de matrizes, é relativamente complexa de ser levada a êxito, pois na execução do programa, por vezes, aparecem novos casos de problemas de matriz momento  $\mathbf{P}_0$  singular. A alternativa de arranjo randômico solucionou quase totalmente essa singularidade, mas prejudicou o melhor posicionamento dos nós. A solução encontrada para este caso foi alterar o mínimo possível a malha nodal. Outra dificuldade foi a limitação imposta pelas poucas informações da referência relativa ao MIP. A principal delas foi a falta de clareza quanto à quantidade de nós utilizados. Nesse contexto, foram utilizadas análises bidimensionais com base linear com três nós, base quadrática de seis nós ou uma base com quantos nós coubessem no domínio de influência, limitando-os a 21 nós. Foram obtidos resultados satisfatórios em todas essas análises.

O método de Galerkin sem elementos lembra o método dos elementos finitos somente no aspecto da utilização do método do resíduo ponderado de mesmo nome, pois, desde a aplicação das condições de contorno por meio dos multiplicadores de Lagrange até a aplicação das forças de superfície atuando inclusive em nós do interior do domínio, o MGSE difere do MEF. Um aspecto bastante favorável do método de Galerkin sem elementos é sua estabilidade, pois é menos suscetível à perda de precisão para grandes variações do domínio

de influência assim como quanto à utilização de funções pesos diversas.

Uma deficiência notória dos métodos sem malha está associada ao tempo de processamento numérico. A necessidade de inversão de matriz ou de resolução de um sistema algébrico a cada ponto de Gauss implica em um uso de uma baixa quantidade destes por célula de integração. Esta, talvez, seja a pior característica em comparação com MEF, já que a diferença no tempo de processamento é notória. Assim, em um atividade de pesquisa onde a maioria dos passos é incerta, há um prejuízo na dinâmica do trabalho, pois qualquer erro, mesmo que simplório, apenas é percebido após uma demorada execução do programa efetuado.

A aplicação dos critérios de visibilidade e de difração seguidos do cálculo da integral  $J$ , conforme sugerido por (SANTANA, 2004), conduziu a resultados satisfatórios. Entretanto, em virtude de não haverem sido seguidas todas as orientações da referência (LU; GU; BELYTCHKO, 1994), como a de utilização de funções exponenciais para MGSE, não foram obtidos resultados mais precisos. Ainda assim, os resultados encontrados se apresentam convergentes aos valores analíticos.

Dentro desse contexto, esta dissertação deixa a futuros pesquisadores do assunto em tela uma tentativa de simplificação de um método cercado de sutilezas, sugerindo como trabalho futuro a utilização dos critérios de visibilidade e difração para o cálculo de  $K_I$  com funções exponenciais para MGSE conforme sugere a referência (LU; GU; BELYTCHKO, 1994), o que não foi seguido neste trabalho. Outra sugestão bastante interessante para o cálculo de  $K_I$  é a utilização do método dos elementos finitos generalizados, onde se utiliza como base o MEF e se incrementa características da partição da unidade pela inclusão de funções com pré-conhecimento do problema estudado. Sugere-se ainda que um futuro pesquisador trabalhe com linhas de programação sem operações redundantes e que utilize uma linguagem de programação mais eficiente quanto à velocidade, como FORTRAN ou C ao invés de *MATLAB*.

## REFERÊNCIAS

- ANDERSON, T. L. *Fracture Mechanics*. 2th. ed. [S.I.]: CRC, 1991.
- BABUSKA, J.; MELENK, I. The partition of the unity finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 727–758, 1995.
- BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. 2th. ed. [S.I.]: PRENTICE HALL, 1996.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. A new implementation of the element-free galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 113, p. 397–414, 1994.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Crack propagation by element-free galerkin methods. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 51, p. 295–315, 1995.
- BROEK, D. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. 3rd. ed. [S.I.]: Martinus Nijhoff, 1982.
- CARPINTERI, A.; VENTURA, G. The partition of unity quadrature in element-free crack modelling. *Computers and Structures*, v. 81, p. 1783–1794, 2003.
- DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. An introduction to programming the meshless element free galerkin. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 5, p. 207–241, 1998.
- DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T.; MOES, N. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 46, p. 131–150, 1999.
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. Hp clouds - an hp meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, v. 12, p. 673–705, 1996.
- DUFLOT, M.; NGUYEN-DANG, H. A meshless method with enriched weight functions for fatigue crack growth. *International Journal for numerical methods in engineering*, v. 59, p. 1945–1961, 2004.
- EWALDS, H. L.; WANHILL, R. J. H. *Fracture Mechanics*. 1th. ed. [S.I.]: Edward Arnold, 1989.
- FLEMING, M. et al. Enrich element-free galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for numerical methods in engineering*, v. 40, p. 1483–1504, 1997.

FLEMING, M. et al. Meshless methods: an overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 3–47, 1996.

HAUSSLER-COMBE, U.; KORN, C. An adaptive approach with the element free galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 162, p. 203–222, 1998.

HEGEN, D. Element-free galerkin methods in combination with finite element approaches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 135, p. 143–166, 1996.

KALJEVIC, I.; SAIGAL, S. An improved element free galerkin formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 2953–2974, 1997.

KNOW, Y. W.; BANG, H. *The Finite Element Method Using MATLAB*. 2th. ed. [S.l.]: CRC, 1996.

LACROIX, D.; BOUILLARD. Improved sensitivity analysis by a coupled fe-efg method. *Computers and Structures*, v. 81, p. 2431–2439, 2003.

LIU, G. R.; GU, Y. T. A matrix triangularization algorithm for the polynomial point interpolation method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, p. 2269–2295, 2003.

LU, Y. Y.; GU, L.; BELYTSCHKO, T. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, p. 229–256, 1994.

LUCY, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, v. 82, p. 1013–1024, 1977.

MENDEZ, S. F. *Meshfree methods and finite elements: friend or foe?* Tese (Tese de doutorado) — Universitat Politecnica de Catalunya, Catalunya, Espanha, 2001.

MONAGHAN, J. J. Why particle methods works. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, v. 3, p. 422, 1982.

NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computation Mechanics*, v. 10, p. 307–318, 1992.

ORGAN, D.; BELYTSCHKO, T.; GERLACH, C. Element free galerkin methods for dynamic fracture in concrete. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 187, p. 385–399, 2000.

ORGAN, D. et al. Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency. *Computation Mechanics*, v. 18, p. 1–11, 1996.

RAO, B. N.; RAHMAN, S. An efficient meshless method for fracture analysis of cracks. *Computation Mechanics*, v. 26, p. 398–408, 2000.

SANTANA, W. C. de. *Um método robusto de elementos finitos generalizados aplicado à mecânica da fratura*. Tese (Tese de doutorado) — PUC, Rio de Janeiro, RJ, 2004.