



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Ciência e Tecnologia

Faculdade de Engenharia

Cleciano Berlando Miranda de Oliveira

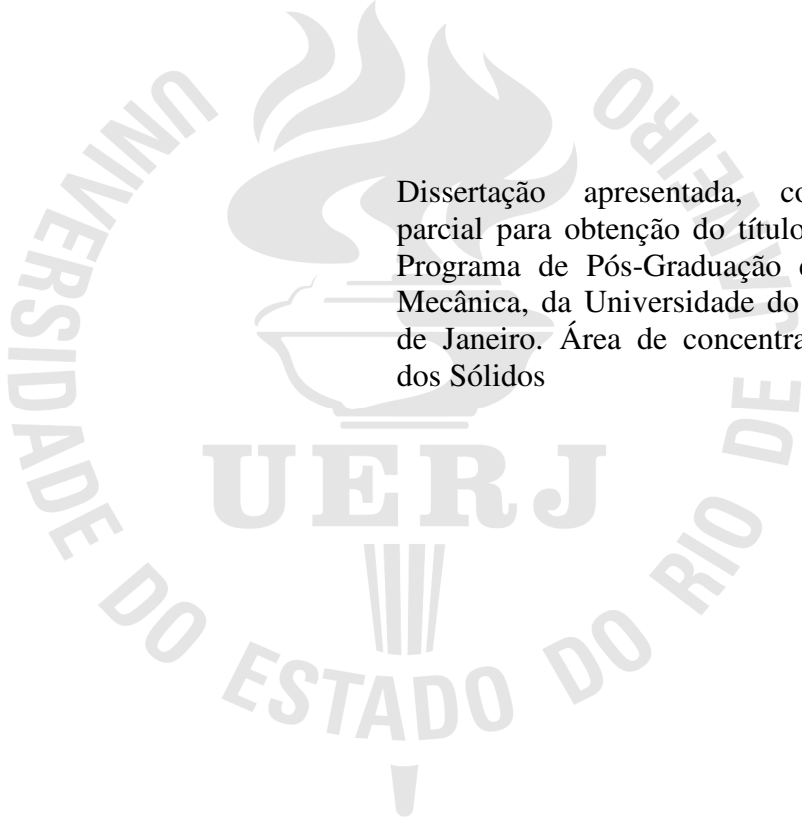
**Modelagem e simulação da propagação de ondas em barras não
homogêneas envolvendo materiais elásticos não lineares**

Rio de Janeiro

2012

Cleciانو Berlando Miranda de Oliveira

Modelagem e simulação da propagação de ondas em barras não homogêneas envolvendo materiais elásticos não lineares



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama

Coorientadora: Prof.^a Dr.^a Maria Laura Martins-Costa

Rio de Janeiro

2012

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

O48	Oliveira, Cleciano Berlando Miranda. Modelagem e simulação da propagação de ondas em barras não homogêneas envolvendo materiais elásticos não lineares / Cleciano Berlando Miranda de Oliveira. – 2012. 91f. Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama. Coorientador: Maria Laura Martins-Costa. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. 1. Engenharia Mecânica. 2. Sistemas não lineares - Dissertações. I. Gama, Rogério Martins Saldanha. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Título. CDU 517.956
-----	---

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Cleciiano Berlando Miranda de Oliveira

Modelagem e simulação da propagação de ondas em barras não homogêneas envolvendo materiais elásticos não lineares

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Aprovado em: 24 de agosto de 2012.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama (Orientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Dr. João Miguel Truong Dinh Tien
Instituto Politécnico – UERJ

Prof.^a Dr.^a Maria Laura Martins-Costa (Coorientadora)
Universidade Federal Fluminense – UFF

Prof. Dr. Heraldo Silva da Costa Mattos
Universidade Federal Fluminense – UFF

Rio de Janeiro

2012

DEDICATÓRIA

A minha Rainha e Esposa Adriana, mulher esplendorosa de grande coração que enche minha vida de alegrias, a minha primogênita Patrícia, minha linda moça de 15 anos que vem superando todas as expectativas intelectuais e afetivas, a minha linda neném Priscila de quase dois anos, uma verdadeira joia rara que já nasceu mandando no papai e, enfim, meu último futuro herdeiro Victor que vem chegando no final do ano, com a graça de DEUS a quem devo tantas alegrias.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS, por tudo que tem me proporcionado de realizações, aprendizados e grandes vitórias em meio há tantos desafios.

Ao meu orientador Rogério e minha coorientadora Maria Laura, que proporcionaram esta vitória e ofereceram um enorme ânimo e apoio em todas as etapas deste trabalho com grandiosa qualidade e capacidade tanto profissional como humana, auxiliando a superar cada obstáculo com determinação e seriedade.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UERJ, que me proporcionou a oportunidade de desenvolver um projeto na área de meu interesse, associado ao Centro de Estudos e Pesquisas em Energias Renováveis CEPER.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio e patrocínio.

Aos professores membros da banca João Miguel e Heraldo, que aceitaram com gentileza o convite, colaborando para a avaliação, aperfeiçoamento e conclusão desta pesquisa.

A minha mãe Regina Célia por todo carinho, educação e bons exemplos de superação e vitórias.

Ao meu pai Manoel Martins por todo carinho e bons exemplos para minha formação.

Ao meu segundo pai João Silas, que chegou quando eu ainda era um menino e conquistou meu coração.

As minhas queridas irmãs Manoela e Fabiana que fazem parte de minha história com grandes momentos felizes juntamente com suas famílias maravilhosas.

Aos meus cunhados que participam intensamente de minha vida como irmãos.

A minha esposa Adriana e minha filha Patrícia, por toda compreensão, carinho e apoio e aos meus mais recentes herdeiros Priscila e Victor que já estão chegando para desfrutar de todas as nossas vitórias.

Ao meu amigo, Wendel Fonseca, que compartilhou comigo todos os momentos de estudos desde a graduação... momentos de dificuldades e alegrias inigualáveis.

Ao meu amigo e Mestre Jayme Monteiro que tanto contribui para meu crescimento.

Aos Mestres da UniFOA que iniciaram meu processo de qualificação na graduação e aos Mestres da UERJ que contribuíram para fechar mais esta etapa de meus aprendizados.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta dissertação, muito obrigado!

"Deus nos concede, a cada dia, uma página de vida nova no livro do tempo. Aquilo que colocarmos nela, corre por nossa conta."

"Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim."

Chico Xavier

RESUMO

OLIVEIRA, Cleciano Berlando Miranda. *Modelagem e simulação da propagação de ondas em barras não homogêneas envolvendo materiais elásticos não lineares*. 2012. 91f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

O objetivo deste trabalho é tratar da simulação do fenômeno de propagação de ondas em uma haste heterogênea elástico, composta por dois materiais distintos (um linear e um não-linear), cada um deles com a sua própria velocidade de propagação da onda. Na interface entre estes materiais existe uma descontinuidade, um choque estacionário, devido ao salto das propriedades físicas. Empregando uma abordagem na configuração de referência, um sistema não-linear hiperbólico de equações diferenciais parciais, cujas incógnitas são a velocidade e a deformação, descrevendo a resposta dinâmica da haste heterogênea. A solução analítica completa do problema de Riemann associado são apresentados e discutidos.

Palavras-chave: Propagação de ondas; Sistema não linear hiperbólico; Equações diferenciais parciais; Velocidade; Deformação.

ABSTRACT

The objective of this work is the simulation of the wave propagation phenomenon in a heterogeneous elastic rod, composed by two distinct materials (a linear and a non-linear one), each of them with its own wave propagation speed. At the interface between these materials there is a discontinuity, a stationary shock, due to the jump of the physical properties. Employing a reference configuration approach, a nonlinear hyperbolic system of partial differential equations, whose unknowns are the velocity and the strain, describing the dynamical response of the heterogeneous rod. The complete analytical solution of the associated Riemann problem is presented and discussed.

Keywords: Wave propagation; Nonlinear hyperbolic system; Partial differential equations; Velocity; Strain.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1-	Motivação: A propagação de ondas durante a colisão	17
Figura 1.2-	Um esquema do problema a ser estudado	18
Figura 4.1-	Solução do problema de Riemann heterogêneo elástico linear representada no plano (X, t)	36
Figura 4.2-	Deformação $\mathcal{E}$ versus X / t , para problema heterogêneo elástico linear.	37
Figura 4.3-	Velocidade ν versus X / t , para problema heterogêneo elástico linear	37
Figura 6.1-	Diagrama do problema	48
Figura 6.2-	Solução do problema heterogêneo elástico linear / não linear, caso I, representada no plano (X, t)	55
Figura 6.3-	Deformação $\mathcal{E}$ versus X / t , para problema heterogêneo elástico linear / não linear, representando o caso I	56
Figura 6.4-	Velocidade ν versus X / t , para problema heterogêneo elástico linear / não linear, representando o caso I	56
Figura 6.5-	Solução do problema heterogêneo elástico linear / não linear, caso II, representada no plano (X, t)	73
Figura 6.6-	Deformação $\mathcal{E}$ versus X / t , para problema heterogêneo elástico linear/ não linear, representando o caso II	73
Figura 6.7-	Velocidade ν versus X / t , para problema heterogêneo elástico linear/ não linear, representando o caso II	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores obtidos para ε_* , ε_{**} , e ν_* a partir de alguns valores dados para a velocidade $\mathcal{U}$, e as constantes $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, para o caso I.....	57
Tabela 2 - Valores obtidos para ε_* , ε_{**} , e ν_* a partir de alguns valores dados para a velocidade $\mathcal{U}$, e as constantes $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, para o caso II	75

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MECAN/UERJ	Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade do Estado do Rio de Janeiro
TEM/UFF	Departamento de Engenharia Mecânica/Universidade Federal Fluminense
IPRJ/UERJ	Instituto Politécnico Rio de Janeiro/ Universidade do Estado do Rio de Janeiro
CEPER	Centro de Estudos e Pesquisas em Energias Renováveis
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

LISTA DE SÍMBOLOS

X	Posição na configuração de referência
t	tempo
ε	Deformação
ε_*	Deformação intermediária à esquerda
ε_{**}	Deformação intermediária à direita
v	Velocidade
V	Componente da velocidade na direção do movimento
V_*	Velocidade intermediária à esquerda
V_{**}	Velocidade intermediária à direita
u	Posição espacial ocupada no instante t
U	Componente da Posição espacial na direção do movimento
V_R	Velocidade inicial à direita
V_L	Velocidade inicial à esquerda
C_1	Constante 1
C_2	Constante 2
P	Ponto material
Ω_t	configuração atual
Ω_0	configuração de referência
ρ	densidade mássica
ρ_0	densidade na configuração de referência
g	aceleração da gravidade
n	normal exterior unitária
T	Tensor tensão de Cauchy
F	Tensor de gradiente de deformação
$\bar{\mathbf{T}}$	Tensor de Piola Kirchhoff
$\bar{\sigma}$	Componente normal do tensor de Piolla Kirchhoff

(ε_L, ν_L)	Estados à esquerda
(ε_R, ν_R)	Estados à direita
$[\]$	Saltos (descontinuidades)
$\xi = X / t$	Variável de similaridade
s	Velocidade de propagação da descontinuidade, medida na configuração de referências
(ε_*, ν_*)	Estado intermediário à esquerda da descontinuidade
$(\varepsilon_{**}, \nu_{**})$	Estado intermediário à direita da descontinuidade
$\mathbf{A}$	Matriz
$\mathbf{1}$	Representação da matriz identidade
λ_1, λ_2	Autovalores da matriz

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	14
1	ESTRUTURAÇÃO	15
1.1	Revisão Bibliográfica	15
1.2	Motivação	17
1.3	Organização do trabalho	19
2	MODELO MATEMÁTICO	20
3	CASO HOMOGÊNEO ELÁSTICO LINEAR	25
4	CASO HETEROGÊNEO ELÁSTICO LINEAR	31
5	CASO HETEROGÊNEO ELÁSTICO NÃO LINEAR	38
5.1	$\bar{\sigma} = \hat{\sigma}_2(\varepsilon)$, com $\bar{\sigma}'' > 0$ no domínio do fenômeno	41
5.2	$\bar{\sigma} = \hat{\sigma}_2(\varepsilon)$, com $\bar{\sigma}'' < 0$ no domínio do fenômeno	44
6	RESULTADOS: UM PROBLEMA PARTICULAR	48
7	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS	88
	BIBLIOGRAFIA	89

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta a simulação do fenômeno de propagação de ondas em barras elásticas heterogêneas, compostas por dois materiais distintos (sendo um linear e o outro não-linear), cada um deles com sua própria velocidade de propagação de onda. Na interface entre estes materiais existe uma descontinuidade, um choque estacionário, devido ao salto das propriedades físicas. A modelagem do problema que descreve a resposta dinâmica da barra heterogênea na configuração de referência é descrita matematicamente por um sistema não-linear hiperbólico de equações diferenciais parciais, cujas incógnitas são a velocidade e a deformação. Neste trabalho é analisada a resposta dinâmica de barras elásticas heterogêneas, fora do estado de equilíbrio. São apresentadas e discutidas soluções analíticas completas dos problemas de Riemann associados a exemplos de interesse. A metodologia proposta neste trabalho permite obter soluções analíticas para os campos de deformação, tensão e velocidade, a partir de um conjunto de dados iniciais.

1 ESTRUTURAÇÃO

1.1 Revisão Bibliográfica

A propagação de ondas de tensão em sólidos é uma ferramenta importante para o estudo da resposta mecânica dos materiais, pois fornece informações sobre o comportamento de sólidos quando as forças que agem sobre eles não estiverem mais em equilíbrio estático. Alguns fenômenos como dispersão, espalhamento e atenuação, que influenciam fortemente a propagação de ondas, afetando a resposta termomecânica dos materiais, podem ser atribuídos a não-linearidades como heterogeneidade do material, características de ondas e as condições de carregamento (Chen et al. 2004).

Zhuang et al. (2003) investigaram experimentalmente, de forma sistemática, a influência do espalhamento na interface, em ondas de choque de amplitude finita - que afeta a dissipação e a dispersão de ondas de choque - considerando a propagação de ondas de choque em compósitos formados por camadas periodicamente dispostas e observaram que estes materiais podem suportar ondas de choque estruturadas estáveis. Estes autores observaram que a propagação de ondas através de materiais compostos por camadas isotrópicas permite investigar o efeito de materiais heterogêneos sob carregamento de choque.

Chen et al. (2004) apresentaram uma solução analítica aproximada para a propagação unidimensional de ondas em materiais heterogêneos compostos por diferentes camadas, submetidos a condições de carregamento caracterizadas por altas velocidades de impacto, com base na teoria de Floquet. Ao contrário de trabalhos anteriores com resultados analíticos, que costumam utilizar carregamento de onda senoidal ou com degrau unitário, a solução analítica aproximada proposta por Chen et al. (2004) permite carregamentos com altas velocidades de impacto.

Berezovsky et al. (2006) consideraram um meio composto por diferentes porções homogêneas, levando em conta a distorção que pode ocorrer em ondas elásticas não-lineares. Os autores simularam numericamente a propagação de ondas unidimensional em sólidos não-lineares heterogêneos, formados por diferentes camadas, empregando uma aproximação de volumes finitos para problemas hiperbólicos, nas quais o problema de Riemann associado é resolvido em cada interface entre os elementos discretos. Berezovsky et al. (2006) analisaram a propagação de ondas não-lineares com amplitude finita para estudar espalhamento, dispersão e atenuação das ondas de choque, empregando o algoritmo de propagação de ondas termodinamicamente consistente, introduzido por Berezovsky e Maugin (2001), para o

problema bidimensional em meios com propriedades sujeitas a rápidas variações. Engelbrecht et al. (2007) estudaram os efeitos de dispersão devido à microestrutura dos materiais, em ondas de deformação não lineares.

O estudo de equações para caracterizar ondas elásticas, levando em conta sua dispersão em meios não-uniformes é de grande relevância nos problemas acústicos. Métodos aproximados podem levar a simplificações convenientes, no caso de pequenas não homogeneidades. (Tenenbaum e Zindeluk 1992a) apresentam uma solução exata algébrica para o espalhamento de ondas acústicas em meios unidimensionais elásticos, considerando um padrão de propagação de ondas em meios compostos por diferentes camadas, que é válida para heterogeneidades fortes. Em um artigo posterior (Tenenbaum e Zindeluk 1992b), os mesmos autores propõem um algoritmo sequencial com um pulso arbitrário na entrada, para resolver problemas inversos de espalhamento acústico para ondas planas em meios elásticos não homogêneos. Este algoritmo é, essencialmente uma inversão matemática do problema direto anteriormente considerado.

Diversos problemas em Mecânica são representados por sistemas hiperbólicos, que permitem descrições muito realistas, uma vez que a propagação de qualquer quantidade - ou informação - em fenómenos naturais reais é caracterizada por uma velocidade finita. No entanto, estes problemas podem não admitir uma solução regular, requerendo um alargamento do espaço de soluções admissíveis. Neste trabalho, os sistemas hiperbólicos que resultam da descrição matemática dos problemas considerados não admitem, em geral, uma solução no sentido clássico. O espaço de soluções admissíveis considerado tem que permitir levar em conta as condições de salto associadas ao conjunto de equações dos problemas, ou seja, deve possibilitar que sejam consideradas funções descontínuas.

No caso de problemas lineares homogêneos ou heterogêneos, suas soluções generalizadas são obtidas conectando os estados intermediários por choques de contato (Lax 1971; Smoller 1983). Um choque de contacto pode ser visto como um caso limite de uma rarefação no qual o leque de rarefação é reduzido a uma única linha, isto é uma descontinuidade com autovalor associado correspondendo exatamente à velocidade do choque. Ao contrário dos choques comuns, o choque de contato é reversível, sem geração de entropia associada (Saldanha da Gama, 1990). A abordagem na configuração de referência utilizada para descrever problemas elásticos homogêneos ou heterogêneos, que sejam homogêneos por partes, origina problemas caracterizados por saltos de deformação em qualquer interface entre dois materiais distintos, representados por choques estacionários - em outras palavras, a posição da interface não é modificada. Uma composição adequada destas

funções descontínuas permite uma solução analítica completa do problema de valor inicial, mesmo quando ele tiver que satisfazer condições de contorno.

A modelagem de barras elásticas lineares ou lineares por partes origina problemas unidimensionais na configuração de referência, descritos matematicamente por sistemas lineares hiperbólicos de equações diferenciais parciais com autovalores dependentes da posição. Para barras lineares por partes, podendo ser compostas por N materiais diferentes, estes autovalores são constantes por partes.

1.2 Motivação

Pode-se imaginar inicialmente um fenômeno muito usual, como “pregar um prego” com o uso de um martelo, ou até mesmo a colisão de um carro com um objeto parado ou em movimento, onde a célula de vida deste carro tem que gerar proteção para os passageiros durante uma colisão, ou seja, os elementos de contato direto com a colisão devem absorver o choque e sofrer deformações que não atinjam níveis elevados a ponto de transmitirem graves consequências aos passageiros. Assim surge a motivação para um estudo que pode ser abordado tanto através de modelos muito simples quanto usando modelos mais complexos como mostrado na figura 1.1.



Figura 1.1 - Motivação: A propagação de ondas durante a colisão

Quando o martelo atinge a “cabeça” do prego, a ponta do prego (que entra na madeira, por exemplo) não recebe a informação imediatamente. Existe uma propagação de onda com velocidade real e finita através do prego (e também através do martelo). O efeito do martelo na ponta do prego só será sentido quando a frente de onda chegar à sua ponta.

No que diz respeito a esse processo, estudar a propagação de ondas em meios elásticos não seria assunto muito importante. No entanto, se pensarmos em outras estruturas sujeitas a colisões e, ou impactos, como a mostrada na figura 1.1, veremos que esse estudo passa a ser de fundamental importância.

As cargas dinâmicas são, em geral, as causadoras de grandes danos às estruturas.

Nesse trabalho, o objetivo é apresentar um estudo sobre a resposta dinâmica unidimensional de duas estruturas elásticas que colidem.

Inicialmente serão supostas duas estruturas elásticas lineares. Em seguida, uma das estruturas será suposta elástica não linear, abordando duas formas constitutivas distintas de comportamento não linear.

Para efeito de representação física e matemática, o fenômeno a ser estudado está representado na figura 1.2 a seguir

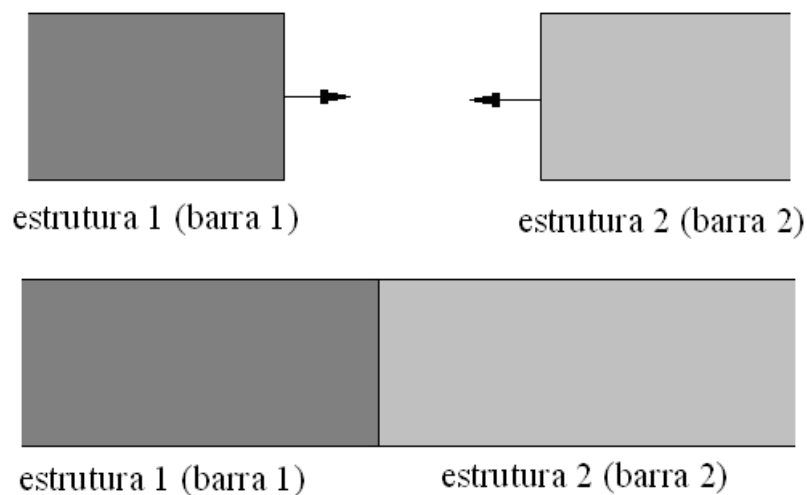


Figura 1.2 - Um esquema do problema a ser estudado.

Antes da colisão as barras (que serão supostas semi infinitas) estão livres de tensões. Após a colisão tem início um processo de compressão em ambas as estruturas.

Como será observado a seguir, haverá uma propagação de deformações tanto para a esquerda quanto para a direita.

1.3 Organização do Trabalho

O segundo capítulo descreve o modelo matemático para barras elásticas não lineares, de um ponto de vista da Mecânica do Contínuo, formulado na configuração de referência.

Uma abordagem sistemática é apresentada, por razões didáticas, na qual os capítulos 3, 4 e 5 tratam diferentes problemas, cuja complexidade é aumentada, combinando duas barras, sendo aquela da esquerda sempre composta por um material elástico linear e em repouso.

No capítulo 3 é abordado o primeiro problema, que considera duas barras elásticas lineares compostas pelo mesmo material. Seria o caso homogêneo, elástico e linear. Neste caso, o problema é caracterizado por duas conexões por choques de contato, não dissipativos. No capítulo 4 o material é heterogêneo elástico linear, ou seja, a barra da direita é composta por um material homogêneo elástico linear diferente do material da barra à esquerda. Consequentemente, as velocidades de propagação, apesar de serem constantes e independentes dos estados, são diferentes. Neste caso, o problema pode ser descrito por sistemas lineares hiperbólicos de equações diferenciais parciais com autovalores constantes por partes, dependentes da posição. Já o quinto capítulo considera a barra da direita composta por um material não linear, caracterizando um material heterogêneo elástico não linear. Duas situações são analisadas: a segunda derivada da componente normal do tensor de Piola-Kirchhoff positiva ou negativa, originando dois problemas hiperbólicos genuinamente não lineares.

Finalmente, no capítulo 6 são mostrados resultados de simulações de dois problemas particulares, ambos com descontinuidades estacionárias, com os autovalores dependentes da posição e no capítulo 7 são apresentadas as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

2 MODELO MATEMÁTICO

Denotando por $\mathbf{u}$ a posição espacial ocupada no instante t pelo ponto material $\mathbf{P}$ que, na configuração de referência, ocupa a posição $\mathbf{X}$, e por u a posição na direção do movimento, pode-se escrever

$$\begin{aligned}\nu &= \hat{\nu}(X, t) = \frac{\partial u}{\partial t} && \text{(velocidade)} \\ \varepsilon &= \hat{\varepsilon}(X, t) = \frac{\partial u}{\partial X} - 1 && \text{(deformação)}\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde ν representa a componente da velocidade $\mathbf{v}$ na direção do movimento e ε a deformação associada à direção X no plano X . Devido a restrições cinemáticas, que requerem que o determinante do tensor gradiente de deformações seja sempre positivo (impõem que o corpo não possa virar pelo avesso), a deformação deve satisfazer a

$$\hat{\varepsilon}(X, t) > -1, \quad \text{para todo } (X, t)\tag{2.2}$$

As equações (2.1) e (2.2) dão origem à seguinte equação diferencial, que representa a compatibilidade geométrica,

$$\frac{\partial \nu}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial X} = 0\tag{2.3}$$

A equação de conservação da quantidade de movimento linear estabelece que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial \Omega_t} \mathbf{T} \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV\tag{2.4}$$

onde Ω_t representa a configuração atual, $\mathbf{v}$ é a velocidade, ρ a densidade mássica, $\mathbf{g}$ a aceleração da gravidade, $\mathbf{n}$ é a normal exterior unitária e $\mathbf{T}$ é o tensor tensão de Cauchy.

Denotando por Ω_0 a configuração de referência, pode-se reescrever a conservação da quantidade de movimento linear como

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho (\det \mathbf{F}) \mathbf{v} \right) dV = \int_{\partial \Omega_t} \mathbf{T} \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{F}$ representa o tensor gradiente de deformação. A equação (2.5) pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho (\det \mathbf{F}) \mathbf{v} \right) dV = \int_{\partial \Omega_0} \bar{\mathbf{T}} \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV \quad (2.6)$$

onde $\bar{\mathbf{T}}$ representa o tensor de Piola Kirchhoff. Este tensor é um campo tal que

$$\int_{\partial \Omega_t} \mathbf{T} \mathbf{n} dS = \int_{\partial \Omega_0} \bar{\mathbf{T}} \mathbf{n} dS \quad (2.7)$$

Empregando o teorema da divergência, a equação (2.6) pode ser expressa como

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho (\det \mathbf{F}) \mathbf{v} \right) dV = \int_{\Omega_0} (\text{Div } \bar{\mathbf{T}}) dV + \int_{\Omega_0} \rho (\det \mathbf{F}) \mathbf{g} dV \quad (2.8)$$

Uma vez que a densidade na configuração de referência é dada por $\rho_{REF} = \rho (\det \mathbf{F})$, pode-se reescrever a equação (2.8) como

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_{REF} \mathbf{v} \right) dV = \int_{\Omega_0} (\text{Div } \bar{\mathbf{T}}) dV + \int_{\Omega_0} \rho_{REF} \mathbf{g} dV \quad (2.9)$$

Considerando hipóteses simplificadoras convenientes, que seriam reduzir o problema a uma única dimensão num sistema de coordenadas cartesianas retangulares e desconsiderar a ação gravitacional, a equação de conservação da quantidade de movimento linear reduz-se a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{REF}\nu) = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \chi} \quad (2.10)$$

onde a componente da velocidade na direção do movimento (ν) e a componente normal ($\bar{\sigma}$) do tensor de Piola Kirchhoff são dados por

$$\begin{aligned} \nu &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \\ \bar{\sigma} &= (\bar{\mathbf{T}}\mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} \end{aligned} \quad (2.11)$$

A fim de simplificar a notação ρ_{REF} será denotado como ρ_0 . Dessa forma, a equação (2.10) pode ser expressa como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0\nu) - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \chi} = 0 \quad (2.12)$$

O sistema de equações que governa o fenômeno é obtido combinando a equação de compatibilidade geométrica (2.3) com a equação de conservação de momentum linear (2.12), que pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial \chi} &= 0 & (\text{compatibilidade}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0\nu) - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \chi} &= 0 & (\text{quantidade de movimento}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

e, no caso da densidade ρ_0 não depender do tempo, o sistema (2.13) reduz-se a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial \chi} &= 0 & (\text{compatibilidade}) \\ \rho_0 \frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \chi} &= 0 & (\text{quantidade de movimento}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Nesse trabalho a componente normal $\bar{\sigma}$ do tensor de Piola Kirchhoff será suposta como uma função estritamente crescente da deformação ε . Além disso, também será suposta ausência de tensões residuais. Matematicamente estas hipóteses levam a $\bar{\sigma} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = 0$.

O sistema de equações (2.14), no presente trabalho, estará sujeito a uma condição inicial da seguinte forma

$$(\varepsilon, \nu) = \begin{cases} (0, \nu_L) & \text{para } -\infty < X < 0, \quad t=0 \\ (0, \nu_R) & \text{para } 0 < X < \infty, \quad t=0 \end{cases} \quad (2.15)$$

A fim de modelar uma colisão, as velocidades iniciais à direita e à esquerda, denotadas por ν_R e ν_L , respectivamente, são supostas constantes e satisfazem a seguinte condição $\nu_L - \nu_R > 0 \Rightarrow \nu_L > \nu_R$.

Combinando as equações (2.14) e (2.15) tem-se o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial X} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X} &= 0, \quad \bar{\sigma} = \hat{\sigma}(\varepsilon, X) \\ (\varepsilon, \nu) &= \begin{cases} (0, \nu_L) & \text{para } -\infty < X < 0, \quad t=0 \\ (0, \nu_R) & \text{para } 0 < X < \infty, \quad t=0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Neste ponto é importante ressaltar que o problema representado na equação (2.16) é um problema de Riemann (Smoller, 1983) e sua solução será discutida a partir do próximo capítulo, considerando que a relação entre a componente normal $\bar{\sigma}$ do tensor de Piola Kirchhoff e a deformação ε seja tal que

$$\bar{\sigma} = \hat{\sigma}(\varepsilon, X) = \begin{cases} c_1 \varepsilon & \text{para } X < 0, \quad c_1 = \text{constante}, \quad c_1 > 0 \\ \hat{\sigma}_2(\varepsilon) & \text{para } X > 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

ou seja, à esquerda, tem-se sempre um material elástico linear, enquanto o material à direita tanto pode ser elástico linear, e, nesse caso obedece à seguinte hipótese constitutiva: $\hat{\sigma}_2(\varepsilon) = c_2 \varepsilon$; como elástico não linear. Nos casos não lineares serão consideradas duas relações constitutivas diferentes, descritas a seguir:

$$\hat{\sigma}_2(\varepsilon) = c_2 |\varepsilon|, \quad c_2 > 0 \quad (2.18)$$

e

$$\hat{\sigma}_2(\varepsilon) = c_2 (\varepsilon^2 + 2\varepsilon), \quad c_2 > 0 \quad (2.19)$$

onde c_1 e c_2 são constantes e a equação (2.18) será denotada como o primeiro caso não linear enquanto a equação (2.19) será chamada de segundo caso não linear, ao longo do trabalho.

3 CASO HOMOGÊNEO ELÁSTICO LINEAR

Neste capítulo é analisada a resposta dinâmica de barras elásticas homogêneas, fora do estado de equilíbrio. Este problema, que é homogêneo linear, é caracterizado por materiais elásticos lineares idênticos à esquerda e à direita ($\bar{\sigma} = c_1 \varepsilon$) do ponto de colisão. Nesse caso, o problema de Riemann apresentado na equação (2.16) reduz-se a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial X} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X} &= 0, \quad \bar{\sigma} = c_1 \varepsilon \\ (\varepsilon, \nu) &= \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < X < 0, \quad t=0 \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } 0 < X < \infty, \quad t=0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

e sua solução é obtida a partir da conexão dos estados à esquerda (ε_L, ν_L) e à direita (ε_R, ν_R) através de soluções contínuas e/ou saltos (descontinuidades). A solução desse problema depende apenas da variável de similaridade, a razão X/t .

As condições de salto associadas ao sistema de equações (3.1) são dadas pelas condições de Rankine-Hugoniot (Lax, 1971), expressas como

$$-\frac{\begin{bmatrix} \nu \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}} = -\frac{\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \rho_0 \nu \end{bmatrix}} = s \quad (3.2)$$

onde s representa a velocidade de propagação da descontinuidade, medida na configuração de referência e $\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$ representa o salto.

No instante inicial há uma colisão entre os dois corpos na origem (em $X=0$). A partir do momento da colisão, há uma interface estacionária em $X=0$, onde pode haver uma descontinuidade. Assim, em $X=0$, teremos que

$$\begin{bmatrix} \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

Dessa forma, denotando por (ε_*, ν_*) o estado à esquerda da descontinuidade e por $(\varepsilon_{**}, \nu_{**})$ o estado à direita dela, pode-se chegar à seguinte conclusão:

$$\begin{aligned} [\nu] &= 0 \Rightarrow \nu_* = \nu_{**} \\ [\bar{\sigma}] &= 0 \Rightarrow \bar{\sigma}_* = \bar{\sigma}_{**} \Rightarrow c_1 \varepsilon_* = c_1 \varepsilon_{**} \Rightarrow \varepsilon_* = \varepsilon_{**} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Logo, no caso de conexão de barras elásticas lineares compostas pelo mesmo material, não há salto nem de velocidade e nem de deformação no ponto da colisão, que, neste problema está localizado em $X=0$.

A solução do problema de Riemann terá, então, a seguinte forma

$$\boxed{(\varepsilon_L, \nu_L) \longrightarrow (\varepsilon_*, \nu_*) \longrightarrow (\varepsilon_R, \nu_R)}$$

Para obter a solução do problema de Riemann é necessário determinar como será a conexão entre os estados (ε_L, ν_L) e (ε_*, ν_*) e entre os estados (ε_*, ν_*) e (ε_R, ν_R) .

Para estabelecer a conexão entre os estados (ε_L, ν_L) e (ε_*, ν_*) considera-se o seguinte problema de Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial X} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \nu}{\partial t} - c_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$(\varepsilon, \nu) = \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < X < 0, \quad t=0 \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } 0 < X < \infty, \quad t=0 \end{cases}$$

Supondo $\rho_0 = 1 = \text{constante}$, o problema (3.4) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial X} &= 0 \\
\frac{\partial \nu}{\partial t} - c_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} &= 0 \\
(\varepsilon, \nu) &= \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < X < 0, \quad t=0 \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } 0 < X < \infty, \quad t=0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

A partir da definição da variável de similaridade $\xi = X / t$ e substituindo as relações definidas a seguir no problema (2.5), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{d\varepsilon}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{X}{t^2} \frac{d\varepsilon}{d\xi} \\
\frac{\partial \nu}{\partial X} &= \frac{d\nu}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{1}{t} \frac{d\nu}{d\xi} \\
\frac{\partial \nu}{\partial t} &= \frac{d\nu}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{X}{t^2} \frac{d\nu}{d\xi} \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial X} &= \frac{d\varepsilon}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{1}{t} \frac{d\varepsilon}{d\xi}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

o problema definido na equação (3.5) pode ser redefinido em função da variável de similaridade

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial X} &= 0 \Rightarrow -\frac{X}{t^2} \frac{d\varepsilon}{d\xi} - \frac{1}{t} \frac{d\nu}{d\xi} = 0 \\
\frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{\partial (c_1 \varepsilon)}{\partial X} &= 0 \Rightarrow -\frac{X}{t^2} \frac{d\nu}{d\xi} - c_1 \frac{1}{t} \frac{d\varepsilon}{d\xi} = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

A equação (3.7) pode ser expressa na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} -X/t & -1 \\ -c_1 & -X/t \end{bmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Assim sendo, a razão X / t é um autovalor da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -c_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Os autovalores da matriz $\mathbf{A}$, denotados por λ_1 e λ_2 , são, então, dados por

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0 &\Rightarrow \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ -c_1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{c_1} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{c_1} \\ \lambda_2 = \sqrt{c_1} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{1}$ representa a matriz identidade.

Como $\lambda = X/t = \text{constante}$, o problema definido pela equação (3.8) não admite solução contínua. Ele só admite uma solução na forma generalizada tal que (ε, ν) seja constante por partes.

Nesse caso, como o problema é elástico linear, os estados (ε_L, ν_L) e (ε_R, ν_R) serão conectados a um estado intermediário (ε_*, ν_*) através de dois choques de contato (Smoller, 1983), descontinuidades cujas velocidades de propagação correspondem exatamente aos próprios autovalores. Um choque de contato, ao contrário dos choques comuns, é reversível, sem qualquer geração de entropia associada. Dessa forma, para os estados (ε_L, ν_L) e (ε_*, ν_*) , teremos, considerando as condições de salto de Rankine-Hugoniot, expressas na equação (3.2)

$$-\frac{\begin{bmatrix} \nu \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}} = -\frac{c_1 \begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \nu \end{bmatrix}} = -s_1 = -(-\sqrt{c_1}) = \sqrt{c_1} \quad (3.11)$$

enquanto para os estados (ε_*, ν_*) e (ε_R, ν_R) , tem-se

$$-\frac{\begin{bmatrix} \nu \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}} = -\frac{c_1 \begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \nu \end{bmatrix}} = -s_2 = -\sqrt{c_1} \quad (3.12)$$

Assim sendo, a deformação ε_* e a velocidade ν_* serão obtidos a partir do seguinte sistema

$$\begin{aligned} -\frac{(\nu_L - \nu_*)}{(\varepsilon_L - \varepsilon_*)} &= -\frac{c_1(\varepsilon_L - \varepsilon_*)}{(\nu_L - \nu_*)} = \sqrt{c_1} \\ -\frac{(\nu_* - \nu_R)}{(\varepsilon_* - \varepsilon_R)} &= -\frac{c_1(\varepsilon_* - \varepsilon_R)}{(\nu_* - \nu_R)} = -\sqrt{c_1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

A equação (3.13) implica em

$$\begin{aligned} -\sqrt{c_1}(\varepsilon_L - \varepsilon_*) &= (\nu_L - \nu_*) \\ \sqrt{c_1}(\varepsilon_* - \varepsilon_R) &= (\nu_* - \nu_R) \end{aligned} \quad (3.14)$$

fornecendo seguintes resultados para o estado intermediário, caracterizado por ε_* e ν_*

$$-\varepsilon_* = \frac{(\nu_L - \nu_R)}{2\sqrt{c_1}} + \frac{\varepsilon_R + \varepsilon_L}{2} \quad (3.14)$$

e

$$\nu_* = \frac{\nu_L + \nu_R}{2} - \frac{\sqrt{c_1}}{2}(\varepsilon_R - \varepsilon_L) \quad (3.15)$$

Conhecido o estado intermediário, pode-se determinar a solução generalizada do problema de Riemann expresso pela equação (3.5). A solução geral para esse problema de Riemann é dada por

$$(\varepsilon, \nu) = \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < X/t < -\sqrt{c_1} \\ (\varepsilon_*, \nu_*) & \text{para } -\sqrt{c_1} < X/t < \sqrt{c_1} \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } \sqrt{c_1} < X/t < \infty \end{cases} \quad (3.16)$$

4 CASO HETEROGÊNEO ELÁSTICO LINEAR

Neste capítulo é analisada a resposta dinâmica de barras elásticas heterogêneas, fora do estado de equilíbrio. Este problema é caracterizado por materiais elásticos lineares diferentes à esquerda e à direita do ponto de colisão. O material 1 (elástico linear com $\bar{\sigma} = c_1 \varepsilon$) ocupa o semi-espaço $X < 0$ enquanto o material 2 (elástico linear com $\bar{\sigma} = c_2 \varepsilon$, $c_2 \neq c_1$) ocupa o semi-espaço $X > 0$. Nesse caso, o problema de Riemann apresentado na equação (2.16) reduz-se a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial X} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X} &= 0, \quad \bar{\sigma} = \begin{cases} c_1 \varepsilon & \text{para } X < 0 \\ c_2 \varepsilon & \text{para } X > 0 \end{cases} \\ (\varepsilon, \nu) &= \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < X < 0, \quad t = 0 \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } 0 < X < \infty, \quad t = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

e, novamente, sua solução é obtida a partir da conexão dos estados à esquerda (ε_L, ν_L) e à direita (ε_R, ν_R) através de soluções contínuas e/ou saltos (descontinuidades). A solução desse problema depende apenas da razão X/t .

As condições de salto associadas ao sistema de equações acima são dadas pelas condições de Rankine-Hugoniot (Smoller, 1983)

$$-\frac{[\nu]}{[\varepsilon]} = -\frac{[\bar{\sigma}]}{[\rho_0 \nu]} = s \quad (4.2)$$

onde s é a velocidade de propagação da descontinuidade na configuração de referência.

A partir do momento em que há a colisão entre os dois corpos diferentes haverá, na origem ($X=0$), uma interface estacionária de descontinuidade. Assim, em $X=0$, tem-se que

$$[\nu] = [\bar{\sigma}] = 0 \quad (4.3)$$

Dessa forma, denotando por (ε_*, ν_*) o estado à esquerda da descontinuidade e por $(\varepsilon_{**}, \nu_{**})$ o estado à direita, pode-se concluir o seguinte:

$$\begin{aligned} [\nu] = 0 &\Rightarrow \nu_* = \nu_{**} \\ [\bar{\sigma}] = 0 &\Rightarrow \bar{\sigma}_* = \bar{\sigma}_{**} \Rightarrow c_1 \varepsilon_* = c_2 \varepsilon_{**} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Logo não há salto de velocidade na interface entre os dois corpos (dois materiais diferentes), mas há um salto de deformação, exceto nos casos em que, por coincidência, ocorrer igualdade entre ε_* e ε_{**} .

A solução do problema de Riemann terá então a forma

$$\boxed{(\varepsilon_L, \nu_L) \longrightarrow (\varepsilon_*, \nu_*) \xrightarrow[\text{choque estacionário}]{} (\varepsilon_{**}, \nu_{**}) \longrightarrow (\varepsilon_R, \nu_R)} \quad (4.5)$$

A solução do problema requer, ainda, a determinação das conexões entre os estados (ε_L, ν_L) e (ε_*, ν_*) e entre os estados $(\varepsilon_{**}, \nu_{**})$ e (ε_R, ν_R) .

Para estabelecer a conexão entre os estados (ε_L, ν_L) e (ε_*, ν_*) pode-se considerar o problema de Riemann a seguir, supondo $\rho_0 = 1 = \text{constante}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial X} &= 0 \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} - \bar{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} &= 0, \quad \bar{c} = \begin{cases} c_1 & \text{para } -\infty < X < 0 \\ c_2 & \text{para } 0 < X < \infty \end{cases} \\ (\varepsilon, \nu) &= \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < X < 0, \quad t = 0 \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } 0 < X < \infty, \quad t = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

A partir da definição da variável de similaridade $\xi = X/t$ e das relações (já mostradas anteriormente),

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{d\varepsilon}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{X}{t^2} \frac{d\varepsilon}{d\xi} \\
 \frac{\partial \nu}{\partial X} &= \frac{d\nu}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{1}{t} \frac{d\nu}{d\xi} \\
 \frac{\partial \nu}{\partial t} &= \frac{d\nu}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{X}{t^2} \frac{d\nu}{d\xi} \\
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} &= \frac{d\varepsilon}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{1}{t} \frac{d\varepsilon}{d\xi}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

tem-se que

$$\begin{bmatrix} -X/t & -1 \\ -\bar{c} & -X/t \end{bmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Assim sendo, a razão X/t é um autovalor da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\bar{c} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Os autovalores da matriz são então dados por

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ -\bar{c} & -\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\bar{c}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{\bar{c}} < 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{\bar{c}} > 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

Uma vez que $\lambda = X/t = \text{constante}$, o problema não admite solução contínua. Admite apenas solução onde (ε, ν) seja constante por partes.

Nesse caso, os estados (ε_L, ν_L) e (ε_*, ν_*) serão conectados por um choque de contato na região à esquerda do ponto de colisão, onde $\mathcal{X} < 0$. Os estados (ε_R, ν_R) e $(\varepsilon_{**}, \nu_{**})$ serão conectados por um choque de contato na região onde $\mathcal{X} > 0$. As velocidades de propagação serão os próprios autovalores. Dessa forma, para os estados (ε_L, ν_L) e (ε_*, ν_*) , tem-se

$$-\frac{\begin{bmatrix} \nu \\ \varepsilon \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \nu \\ \varepsilon \end{bmatrix}} = -\frac{\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \nu \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \nu \\ \varepsilon \end{bmatrix}} = -s_1 = -\lambda_1 = -(-\sqrt{\bar{c}}) = \sqrt{\bar{c}} = \sqrt{c_1} \quad (4.11)$$

e para os estados (ε_R, ν_R) e $(\varepsilon_{**}, \nu_{**})$, tem-se

$$-\frac{\begin{bmatrix} \nu \\ \varepsilon \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \nu \\ \varepsilon \end{bmatrix}} = -\frac{\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \nu \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \nu \\ \varepsilon \end{bmatrix}} = -s_2 = -\lambda_2 = -(\sqrt{\bar{c}}) = -\sqrt{\bar{c}} = -\sqrt{c_2} \quad (4.12)$$

Assim sendo, ε_* , ε_{**} e ν_* devem satisfazer

$$\begin{aligned} -\frac{(\nu_L - \nu_*)}{(\varepsilon_L - \varepsilon_*)} &= -\frac{c_1(\varepsilon_L - \varepsilon_*)}{(\nu_L - \nu_*)} = \sqrt{c_1} \\ -\frac{(\nu_{**} - \nu_R)}{(\varepsilon_{**} - \varepsilon_R)} &= -\frac{c_2(\varepsilon_{**} - \varepsilon_R)}{(\nu_{**} - \nu_R)} = -\sqrt{c_2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

ou seja, ε_* , ε_{**} e ν_* serão obtidos de

$$\begin{aligned} -\sqrt{c_1}(\varepsilon_L - \varepsilon_*) &= (\nu_L - \nu_*) \\ \sqrt{c_2}(\varepsilon_{**} - \varepsilon_R) &= (\nu_{**} - \nu_R) \\ c_1 \varepsilon_* &= c_2 \varepsilon_{**} \end{aligned} \quad (4.14)$$

o que fornece o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_* &= \frac{(\nu_L - \nu_R) + \sqrt{c_1} \varepsilon_L + \sqrt{c_2} \varepsilon_R}{\frac{c_1}{\sqrt{c_2}} + \sqrt{c_1}} \\
\varepsilon_{**} &= \frac{(\nu_L - \nu_R) + \sqrt{c_1} \varepsilon_L + \sqrt{c_2} \varepsilon_R}{\sqrt{c_2} + \frac{c_2}{\sqrt{c_1}}} \\
\nu_* &= \frac{\sqrt{c_1}(\nu_L) + \sqrt{c_2}(\nu_R)}{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}} + \frac{(c_1 \varepsilon_L - c_2 \varepsilon_R)}{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Assim, a solução geral (no sentido generalizado) para esse problema de Riemann é dada por

$$(\varepsilon, \nu) = \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < X/t < -\sqrt{c_1} \\ (\varepsilon_*, \nu_*) & \text{para } -\sqrt{c_1} < X/t < 0 \\ (\varepsilon_{**}, \nu_*) & \text{para } 0 < X/t < \sqrt{c_2} \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } \sqrt{c_2} < X/t < \infty \end{cases} \tag{4.16}$$

e tem, então, a seguinte forma

$$\boxed{(\varepsilon_L, \nu_L) \xrightarrow[\text{choque de contato}]{} (\varepsilon_*, \nu_*) \xrightarrow[\text{choque estacionário}]{} (\varepsilon_{**}, \nu_*) \xrightarrow[\text{choque de contato}]{} (\varepsilon_R, \nu_R)} \tag{4.17}$$

A figura 4.1 mostra a representação da solução do problema de Riemann definido pela equação (4.6), dada pelas equações (4.16) e (4.17), no plano (X, t) .

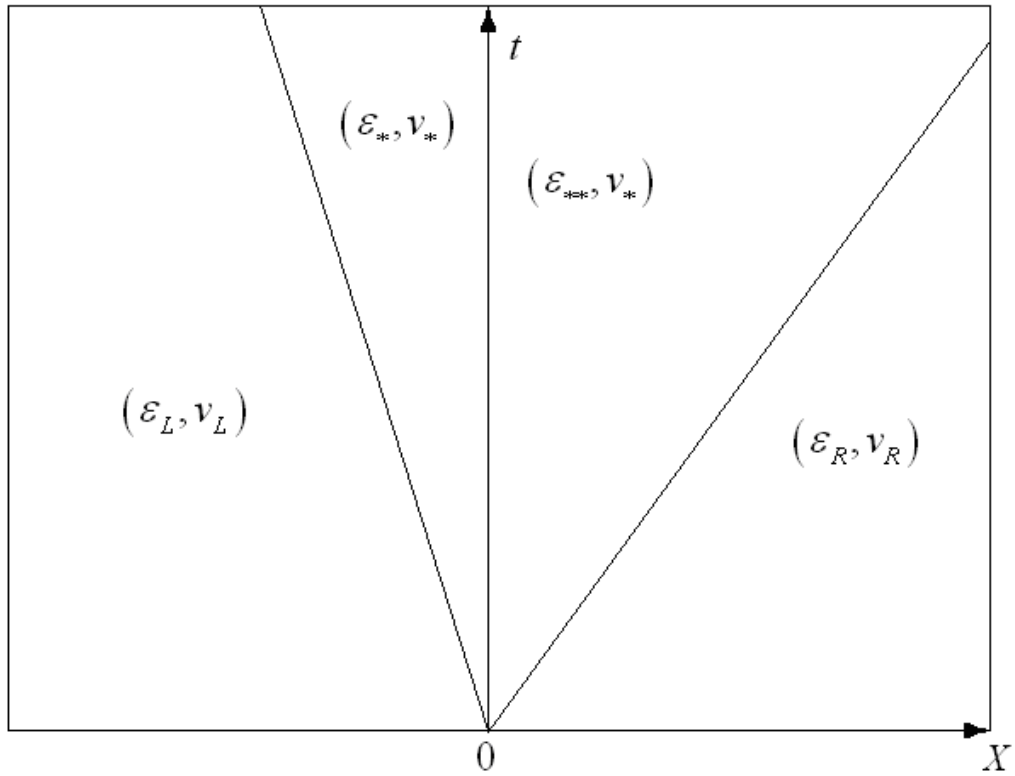


Figura 4.1 Solução do problema de Riemann heterogêneo elástico linear representada no plano (X, t) .

As figuras 4.2 e 4.3 apresentam a deformação $\mathcal{E}$, e a velocidade v como função da variável de similaridade X/t , no caso do problema heterogêneo elástico linear, definido na equação (4.1). Observa-se que apenas a deformação tem um salto no ponto de colisão ($X=0$).

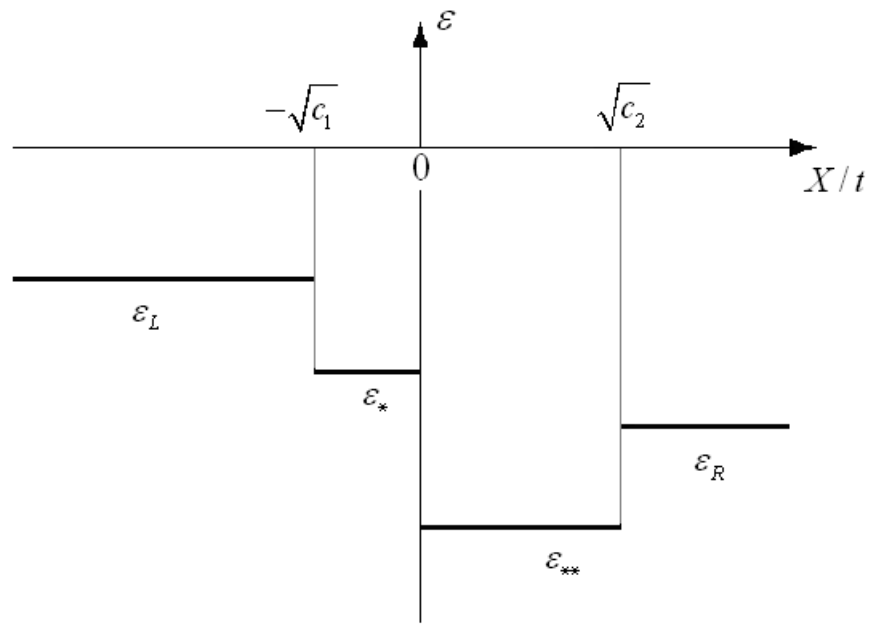


Figura 4.2. Deformação ε versus X/t , para problema heterogêneo elástico linear.

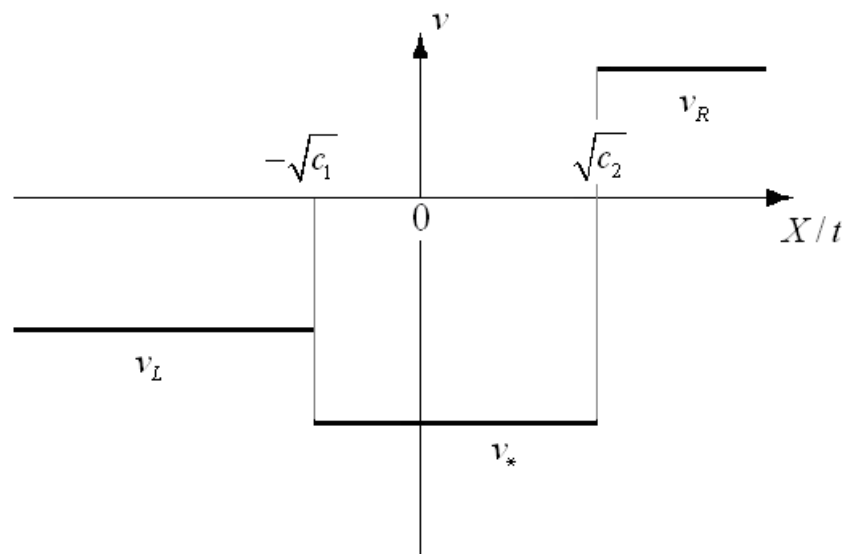


Figura 4.3. Velocidade v versus X/t , para problema heterogêneo elástico linear.

5 CASO HETEROGÊNEO ELÁSTICO NÃO LINEAR

Neste capítulo considera-se a resposta dinâmica de barras elásticas heterogêneas, fora do estado de equilíbrio, onde, mais uma vez o material 1 é elástico linear com $\bar{\sigma} = c_1 \varepsilon$ e ocupa o semi-espço $X < 0$, à esquerda do ponto de colisão; enquanto o material 2, que ocupa o semi-espço $X > 0$, à direita do ponto de colisão, é elástico não linear com, $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}_2(\varepsilon)$, nas duas situações descritas a seguir:

$$1^a - \bar{\sigma} = \hat{\sigma}_2(\varepsilon), \text{ com } \bar{\sigma}^{\text{ll}} > 0 \text{ no domínio do fenômeno}$$

$$2^a - \bar{\sigma} = \hat{\sigma}_2(\varepsilon), \text{ com } \bar{\sigma}^{\text{ll}} < 0 \text{ no domínio do fenômeno}$$

Nesse caso, o problema de Riemann apresentado na equação (2.16) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial X} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X} &= 0, \quad \bar{\sigma} = \begin{cases} c_1 \varepsilon & \text{para } X < 0 \\ \hat{\sigma}_2(\varepsilon) & \text{para } X > 0 \end{cases} \\ (\varepsilon, \nu) &= \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < X < 0, \quad t = 0 \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } 0 < X < \infty, \quad t = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Mais uma vez, a solução do problema de Riemann apresentado na equação (5.1), que depende apenas da razão X/t , é obtida a partir da conexão dos estados à esquerda (ε_L, ν_L) e à direita (ε_R, ν_R) através de soluções contínuas e/ou saltos (descontinuidades).

As condições de salto associadas ao sistema de equações (5.1) são dadas pelas condições de Rankine-Hugoniot (Smoller, 1983)

$$-\frac{[\nu]}{[\varepsilon]} = -\frac{[\bar{\sigma}]}{[\rho_0 \nu]} = s \quad (5.2)$$

onde s é a velocidade (na configuração de referência) de propagação da descontinuidade.

Haverá na origem ($X=0$) uma interface estacionária de descontinuidade, a partir do momento da colisão entre os dois corpos diferentes. Assim, em $X=0$, tem-se que

$$[\nu] = [\bar{\sigma}] = 0 \quad (5.3)$$

Dessa forma, denotando, mais uma vez, por (ε_*, ν_*) o estado à esquerda da descontinuidade e por $(\varepsilon_{**}, \nu_{**})$ o estado à direita, pode-se concluir o seguinte:

$$\begin{aligned} [\nu] = 0 &\Rightarrow \nu_* = \nu_{**} \\ [\bar{\sigma}] = 0 &\Rightarrow \bar{\sigma}_* = \bar{\sigma}_{**} \Rightarrow c_1 \varepsilon_* = \hat{\sigma}_2(\varepsilon_{**}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Logo não há salto de velocidade na interface entre os dois corpos (dois materiais diferentes, um elástico linear e o outro elástico não linear), mas há um salto de deformação.

A solução do problema de Riemann terá então a forma

$$\boxed{(\varepsilon_L, \nu_L) \longrightarrow (\varepsilon_*, \nu_*) \xrightarrow[\text{choque estacionário}]{} (\varepsilon_{**}, \nu_{**}) \longrightarrow (\varepsilon_R, \nu_R)} \quad (5.5)$$

A solução deste problema requer, ainda, a determinação das conexões entre os estados (ε_L, ν_L) e (ε_*, ν_*) e entre os estados $(\varepsilon_{**}, \nu_{**})$ e (ε_R, ν_R) .

Para estabelecer a conexão entre os estados (ε_L, ν_L) e (ε_*, ν_*) pode-se considerar o problema de Riemann a seguir, supondo $\rho_0 = 1 = \text{constante}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial X} &= 0 \\
\frac{\partial \nu}{\partial t} - \bar{\sigma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} &= 0, \quad \bar{\sigma} = \begin{cases} c_1 \varepsilon & \text{para } X < 0 \\ \hat{\sigma}_2(\varepsilon) & \text{para } X > 0 \end{cases} \\
(\varepsilon, \nu) &= \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < X < 0, \quad t=0 \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } 0 < X < \infty, \quad t=0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

A partir da definição da variável de similaridade $\xi = X/t$ e das relações (já mostradas anteriormente),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{d\varepsilon}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{X}{t^2} \frac{d\varepsilon}{d\xi} \\
\frac{\partial \nu}{\partial X} &= \frac{d\nu}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{1}{t} \frac{d\nu}{d\xi} \\
\frac{\partial \nu}{\partial t} &= \frac{d\nu}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{X}{t^2} \frac{d\nu}{d\xi} \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial X} &= \frac{d\varepsilon}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{1}{t} \frac{d\varepsilon}{d\xi}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

tem-se que

$$\begin{bmatrix} -X/t & -1 \\ -\bar{\sigma} & -X/t \end{bmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Assim sendo, a razão X/t é um autovalor da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\bar{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Os autovalores da matriz são, então, dados por

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ -\bar{\sigma} & -\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\bar{\sigma}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{\bar{\sigma}} < 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{\bar{\sigma}} > 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Uma vez que para $\mathcal{X} < 0$ tem-se $\lambda = \mathcal{X} / t = \text{constante}$, o problema não admite solução contínua para $\mathcal{X} < 0$ (material 1). Só admite solução onde (ε, ν) seja constante por partes.

Nesse caso, mais uma vez, os estados (ε_L, ν_L) e (ε_*, ν_*) serão conectados por um choque de contato na região à esquerda do ponto de colisão, onde $\mathcal{X} < 0$. Assim,

$$-\frac{[\nu]}{[\varepsilon]} = -\frac{[\bar{\sigma}]}{[\nu]} = -s_1 = -\lambda_1 = -(-\sqrt{c_1}) = \sqrt{c_1} \quad (5.11)$$

e, conseqüentemente

$$-\sqrt{c_1}(\varepsilon_L - \varepsilon_*) = (\nu_L - \nu_*) \quad (5.12)$$

Os estados (ε_R, ν_R) e (ε_*, ν_*) serão conectados por um choque ou por uma rarefação (solução contínua) dependendo do comportamento do segundo autovalor na região $\mathcal{X} > 0$.

A seguir, será considerado o problema de Riemann nas duas situações mencionadas no início desse capítulo, ou seja $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}_2(\varepsilon)$, com $\bar{\sigma}'' > 0$ e com $\bar{\sigma}'' < 0$.

5.1 $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}_2(\varepsilon)$, COM $\bar{\sigma}'' > 0$ NO DOMÍNIO DO FENÔMENO

Uma vez que $\lambda = \mathcal{X} / t$, os estados (ε_*, ν_*) e (ε_R, ν_R) serão conectados por uma rarefação se o autovalor $\lambda_2 = \sqrt{\bar{\sigma}'}(\varepsilon)$ for uma função crescente de $\mathcal{X} / t$ entre esses dois estados.

Para que isso ocorra, com $\bar{\sigma}^{\parallel} > 0$, é necessário que $\varepsilon_{**} < \varepsilon_R$. Se $\varepsilon_{**} > \varepsilon_R$, o autovalor $\lambda_2 = \sqrt{\bar{\sigma}^{\parallel}(\varepsilon)}$ será uma função decrescente de $\mathcal{X}/t$, o que impede a conexão por uma função contínua.

Assim, se $\bar{\sigma}^{\parallel} > 0$ e $\varepsilon_{**} > \varepsilon_R$, a conexão entre os estados será efetuada através de uma descontinuidade, que será um choque, por satisfazer às condições de entropia.

No caso de conexão por rarefação, os estados $(\varepsilon_{**}, \nu_*)$ e (ε_R, ν_R) serão tais que

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{\bar{\sigma}^{\parallel}} & -1 \\ -\bar{\sigma}^{\parallel} & -\sqrt{\bar{\sigma}^{\parallel}} \end{bmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -\sqrt{\bar{\sigma}^{\parallel}} d\varepsilon - d\nu = 0 \quad (5.13)$$

ou seja,

$$\int_{\varepsilon_{**}}^{\varepsilon_R} \sqrt{\bar{\sigma}^{\parallel}(\varepsilon)} d\varepsilon + \nu_R - \nu_* = 0 \quad (5.14)$$

Assim, os valores de ε_* , ε_{**} e ν_* são obtidos do sistema a seguir:

$$\begin{aligned} c_1 \varepsilon_* &= \hat{\sigma}_2(\varepsilon_{**}) \\ -\sqrt{c_1}(\varepsilon_L - \varepsilon_*) &= (\nu_L - \nu_*) \\ \int_{\varepsilon_{**}}^{\varepsilon_R} \sqrt{\bar{\sigma}^{\parallel}(\varepsilon)} d\varepsilon + \nu_R - \nu_* &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

A solução completa do problema é, então, dada por

$$(\varepsilon, \nu) = \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < X/t < -\sqrt{c_1} \\ (\varepsilon_*, \nu_*) & \text{para } -\sqrt{c_1} < X/t < 0 \\ (\varepsilon_{**}, \nu_*) & \text{para } 0 < X/t < \sqrt{\hat{\sigma}_2^{\setminus}(\varepsilon_{**})} \\ (\varepsilon, \nu) = (f(X/t), g(X/t)) & \\ \quad \text{para } \sqrt{\hat{\sigma}_2^{\setminus}(\varepsilon_{**})} < X/t < \sqrt{\hat{\sigma}_2^{\setminus}(\varepsilon_R)} \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } \sqrt{\hat{\sigma}_2^{\setminus}(\varepsilon_R)} < X/t < \infty \end{cases} \quad (5.16)$$

onde $f(X/t)$ e $g(X/t)$ são obtidas a partir das equações

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{\setminus}(f(X/t)) &= (X/t)^2 \\ g(X/t) &= \int_{f(X/t)}^{\varepsilon_R} \sqrt{\bar{\sigma}^{\setminus}(\varepsilon)} d\varepsilon + \nu_R \end{aligned} \quad (5.17)$$

No caso de conexão por choque, os estados $(\varepsilon_{**}, \nu_*)$ e (ε_R, ν_R) serão tais que

$$-\frac{\begin{bmatrix} \nu \\ \varepsilon \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \nu \\ \varepsilon \end{bmatrix}} = -\frac{\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \nu \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \nu \end{bmatrix}} = -s_2 \quad (5.18)$$

ou seja,

$$-\frac{(\nu_R - \nu_*)}{(\varepsilon_R - \varepsilon_{**})} = -\frac{(\bar{\sigma}(\varepsilon_R) - \bar{\sigma}(\varepsilon_{**}))}{\nu_R - \nu_*} \quad (5.19)$$

Assim, os valores de ε_* , ε_{**} e ν_* são obtidos do sistema a seguir:

$$\begin{aligned}
c_1 \varepsilon_* &= \hat{\sigma}_2(\varepsilon_{**}) \\
-\sqrt{c_1}(\varepsilon_L - \varepsilon_*) &= (\nu_L - \nu_*) \\
\frac{(\nu_R - \nu_*)}{(\varepsilon_R - \varepsilon_{**})} &= \frac{(\hat{\sigma}_2(\varepsilon_R) - \hat{\sigma}_2(\varepsilon_{**}))}{\nu_R - \nu_*} = s_2
\end{aligned} \tag{5.20}$$

ou ainda, levando em conta que $\bar{\sigma}^{\backslash} > 0$ e $\varepsilon_{**} > \varepsilon_R$,

$$\begin{aligned}
c_1 \varepsilon_* &= \hat{\sigma}_2(\varepsilon_{**}) \\
-\sqrt{c_1}(\varepsilon_L - \varepsilon_*) &= (\nu_L - \nu_*) \\
\frac{(\nu_R - \nu_*)}{(\varepsilon_R - \varepsilon_{**})} &= s_2 > 0 \\
\nu_R - \nu_* &= -\sqrt{(\hat{\sigma}_2(\varepsilon_R) - \hat{\sigma}_2(\varepsilon_{**}))(\varepsilon_R - \varepsilon_{**})}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

e a solução completa é dada por:

$$(\varepsilon, \nu) = \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < \mathcal{X}/t < -\sqrt{c_1} \\ (\varepsilon_*, \nu_*) & \text{para } -\sqrt{c_1} < \mathcal{X}/t < 0 \\ (\varepsilon_{**}, \nu_*) & \text{para } 0 < \mathcal{X}/t < s_2 \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } s_2 < \mathcal{X}/t < \infty \end{cases} \tag{5.22}$$

5.2 $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}_2(\varepsilon)$, COM $\bar{\sigma}^{\backslash} < 0$ NO DOMÍNIO DO FENÔMENO

Uma vez que $\lambda = \mathcal{X}/t$, os estados $(\varepsilon_{**}, \nu_*)$ e (ε_R, ν_R) serão conectados por uma rarefação se o autovalor $\lambda_2 = \sqrt{\bar{\sigma}^{\backslash}(\varepsilon)}$ for uma função crescente de $\mathcal{X}/t$ entre esses dois estados.

Para que isso ocorra, com $\bar{\sigma}^{\parallel} > 0$, é necessário que $\varepsilon_{**} > \varepsilon_R$. Se $\varepsilon_{**} < \varepsilon_R$ tem-se que o autovalor $\lambda_2 = \sqrt{\bar{\sigma}^{\parallel}(\varepsilon)}$ será uma função decrescente de X/t , o que impede a conexão por uma função contínua.

Assim, se $\bar{\sigma}^{\parallel} > 0$ e $\varepsilon_{**} < \varepsilon_R$, a conexão entre os estados será efetuada através de uma descontinuidade (um choque, que satisfaz às condições de entropia).

No caso de conexão por rarefação, os estados $(\varepsilon_{**}, \nu_*)$ e (ε_R, ν_R) serão tais que

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{\bar{\sigma}^{\parallel}} & -1 \\ -\bar{\sigma}^{\parallel} & -\sqrt{\bar{\sigma}^{\parallel}} \end{bmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -\sqrt{\bar{\sigma}^{\parallel}} d\varepsilon - d\nu = 0 \quad (5.23)$$

ou seja,

$$\int_{\varepsilon_{**}}^{\varepsilon_R} \sqrt{\bar{\sigma}^{\parallel}(\varepsilon)} d\varepsilon + \nu_R - \nu_* = 0 \quad (5.24)$$

Assim, os valores de ε_* , ε_{**} e ν_* são obtidos do (mesmo) sistema abaixo:

$$\begin{aligned} c_1 \varepsilon_* &= \hat{\sigma}_2(\varepsilon_{**}) \\ -\sqrt{c_1}(\varepsilon_L - \varepsilon_*) &= (\nu_L - \nu_*) \\ \int_{\varepsilon_{**}}^{\varepsilon_R} \sqrt{\bar{\sigma}^{\parallel}(\varepsilon)} d\varepsilon + \nu_R - \nu_* &= 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

A solução completa do problema é, então, dada por

$$(\varepsilon, \nu) = \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < X/t < -\sqrt{c_1} \\ (\varepsilon_*, \nu_*) & \text{para } -\sqrt{c_1} < X/t < 0 \\ (\varepsilon_{**}, \nu_*) & \text{para } 0 < X/t < \sqrt{\hat{\sigma}_2^*(\varepsilon_{**})} \\ (\varepsilon, \nu) = (f(X/t), g(X/t)) & \\ \text{para } \sqrt{\hat{\sigma}_2^*(\varepsilon_{**})} < X/t < \sqrt{\hat{\sigma}_2^*(\varepsilon_R)} & \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } \sqrt{\hat{\sigma}_2^*(\varepsilon_R)} < X/t < \infty \end{cases} \quad (5.26)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^*(f(X/t)) &= (X/t)^2 \\ g(X/t) &= \int_{f(X/t)}^{\varepsilon_R} \sqrt{\bar{\sigma}^*(\varepsilon)} d\varepsilon + \nu_R \end{aligned} \quad (5.27)$$

No caso de conexão por choque, os estados $(\varepsilon_{**}, \nu_*)$ e (ε_R, ν_R) serão tais que

$$-\frac{[\nu]}{[\varepsilon]} = -\frac{[\bar{\sigma}]}{[\nu]} = -s_2 \quad (5.28)$$

ou seja,

$$-\frac{(\nu_R - \nu_*)}{(\varepsilon_R - \varepsilon_{**})} = -\frac{(\bar{\sigma}(\varepsilon_R) - \bar{\sigma}(\varepsilon_{**}))}{\nu_R - \nu_*} \quad (5.29)$$

Assim, os valores de ε_* , ε_{**} e ν_* são obtidos do sistema a seguir:

$$\begin{aligned}
c_1 \varepsilon_* &= \hat{\sigma}_2(\varepsilon_{**}) \\
-\sqrt{c_1}(\varepsilon_L - \varepsilon_*) &= (\nu_L - \nu_*) \\
\frac{(\nu_R - \nu_*)}{(\varepsilon_R - \varepsilon_{**})} &= \frac{(\hat{\sigma}_2(\varepsilon_R) - \hat{\sigma}_2(\varepsilon_{**}))}{\nu_R - \nu_*} = s_2
\end{aligned} \tag{5.30}$$

ou ainda, levando em conta que $\bar{\sigma}^{\text{II}} < 0$ e $\varepsilon_{**} < \varepsilon_R$,

$$\begin{aligned}
c_1 \varepsilon_* &= \hat{\sigma}_2(\varepsilon_{**}) \\
-\sqrt{c_1}(\varepsilon_L - \varepsilon_*) &= (\nu_L - \nu_*) \\
\frac{(\nu_R - \nu_*)}{(\varepsilon_R - \varepsilon_{**})} &= s_2 > 0 \\
\nu_R - \nu_* &= +\sqrt{(\hat{\sigma}_2(\varepsilon_R) - \hat{\sigma}_2(\varepsilon_{**}))(\varepsilon_R - \varepsilon_{**})}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

e a solução completa é dada por:

$$(\varepsilon, \nu) = \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < X/t < -\sqrt{c_1} \\ (\varepsilon_*, \nu_*) & \text{para } -\sqrt{c_1} < X/t < 0 \\ (\varepsilon_{**}, \nu_*) & \text{para } 0 < X/t < s_2 \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } s_2 < X/t < \infty \end{cases} \tag{5.32}$$

Assim, a solução geral (no sentido generalizado) para esse problema de Riemann terá a forma

$$\boxed{(\varepsilon_L, \nu_L) \xrightarrow{\text{choque de contato}} (\varepsilon_*, \nu_*) \xrightarrow{\text{choque estacionário}} (\varepsilon_{**}, \nu_*) \xrightarrow{\text{choque ou rarefação}} (\varepsilon_R, \nu_R)} \tag{5.32}$$

6 RESULTADOS: UM PROBLEMA PARTICULAR

O problema a ser considerado neste capítulo é a colisão de duas barras semi-infinitas: a da esquerda, inicialmente em repouso, formada por material elástico linear, é atingida pela da direita, que viaja com uma velocidade $-\mathcal{U}$, e é composta por um material elástico não linear. Serão considerados dois tipos diferentes de materiais elásticos não lineares, denotados por caso I e caso II.

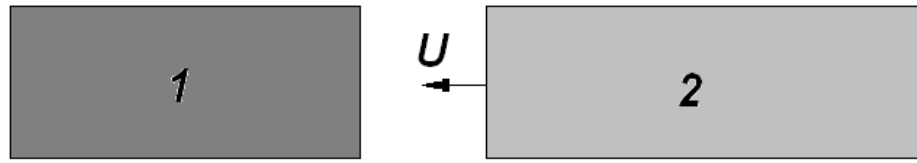


Figura 6.1. Diagrama do problema.

No instante do choque, por hipótese inelástico, que ocorre em $\mathcal{X}=0$, tem-se a seguinte condição inicial:

$$\begin{aligned} (\varepsilon, \nu) &= (\varepsilon_L, \nu_L) = (0, 0) & \text{para } \mathcal{X} < 0 \\ (\varepsilon, \nu) &= (\varepsilon_R, \nu_R) = (0, -\mathcal{U}) & \text{para } \mathcal{X} > 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde é suposto que $\mathcal{U} > 0$.

O problema descrito na figura 6.1 é modelado matematicamente combinando o problema de Riemann descrito pela equação (5.1) às condições iniciais dadas pela equação (6.1). Ele pode ser representado na configuração de referência como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial \mathcal{X}} &= 0 \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathcal{X}} &= 0 \\ \bar{\sigma} &= \begin{cases} c_1 \varepsilon, & \text{para } \mathcal{X} < 0 \\ c_2 |\varepsilon| \varepsilon, & \text{para } \mathcal{X} > 0 \end{cases} \\ (\varepsilon, \nu) &= (\varepsilon_L, \nu_L) = (0, 0) & \text{para } \mathcal{X} < 0 \\ (\varepsilon, \nu) &= (\varepsilon_R, \nu_R) = (0, -\mathcal{U}) & \text{para } \mathcal{X} > 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Na equação (6.2) foi suposto que a componente do tensor de Piola-Kirchhoff tem um comportamento dado por $\bar{\sigma} = c_2 |\varepsilon| \varepsilon$ na barra 2. Este problema será denotado como caso I.

A solução da equação (6.2), no sentido generalizado, depende apenas da razão X / t . Definindo a variável de similaridade $\xi = X / t$ tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{d\varepsilon}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{X}{t^2} \frac{d\varepsilon}{d\xi} \\ \frac{\partial \nu}{\partial X} &= \frac{d\nu}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{1}{t} \frac{d\nu}{d\xi} \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} &= \frac{d\nu}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{X}{t^2} \frac{d\nu}{d\xi} \\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X} &= \frac{d\bar{\sigma}}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{1}{t} \frac{d\bar{\sigma}}{d\xi}\end{aligned}\tag{6.3}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial X} &= 0 \Rightarrow -\frac{X}{t^2} \frac{d\varepsilon}{d\xi} - \frac{1}{t} \frac{d\nu}{d\xi} = 0 \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X} &= 0 \Rightarrow -\frac{X}{t^2} \frac{d\nu}{d\xi} - \frac{1}{t} \frac{d\bar{\sigma}}{d\xi} = 0\end{aligned}\tag{6.4}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} -X/t & -1 \\ -\bar{\sigma}'(\varepsilon) & -X/t \end{bmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{6.5}$$

Assim sendo, a razão X / t é um autovalor da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\bar{\sigma}'(\varepsilon) & 0 \end{bmatrix}\tag{6.6}$$

Os autovalores da matriz são dados por

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ -\bar{\sigma}(\varepsilon) & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\bar{\sigma}(\varepsilon)} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{\bar{\sigma}(\varepsilon)} \\ \lambda_2 = \sqrt{\bar{\sigma}(\varepsilon)} \end{cases} \quad (6.7)$$

Se, entre dois estados (ε, ν) , o autovalor λ_1 for uma função crescente de X/t então estes dois estados serão conectados por uma solução contínua denominada rarefação-1. Se, entre dois estados (ε, ν) , o autovalor λ_2 for uma função crescente de X/t então estes dois estados serão conectados por uma solução contínua denominada rarefação-2.

As soluções do tipo rarefação só serão possíveis para $X > 0$, uma vez que, para $X < 0$, tem-se $\lambda_1 = -c_1 = \text{constante}$ e $\lambda_2 = c_1 = \text{constante}$ (logo não podem ser funções crescentes).

Uma vez que, na origem, há uma descontinuidade estacionária, onde a velocidade é contínua e

$$\{c_1 \varepsilon\}_- = \{c_2 | \varepsilon | \varepsilon\}_+ \quad (6.8)$$

pode-se dizer que a solução será dada por

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{choque} & & \text{choque} & & \text{choque} & \\ & & & & & \text{ou} & \\ & & & & & \text{rarefação} & \\ (\varepsilon_L, \nu_L) & \rightarrow & (\varepsilon_*, \nu_*) & \rightarrow & (\varepsilon_{**}, \nu_*) & \rightarrow & (\varepsilon_R, \nu_R) \end{array} \quad (6.9)$$

O choque mais à esquerda (que será denominado choque-1) é um choque de contato onde

$$\begin{bmatrix} \nu \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \nu \end{bmatrix} = -s_1 = -(-\sqrt{c_1}) \quad (6.10)$$

ou seja, como a velocidade de propagação para $\mathcal{X} < 0$ é negativa

$$\frac{\nu_* - \nu_L}{\varepsilon_* - \varepsilon_L} = \frac{c_1(\varepsilon_* - \varepsilon_L)}{\nu_* - \nu_L} = \sqrt{c_1} \quad (6.11)$$

Uma vez que $\nu_L = 0$ e $\varepsilon_L = 0$, tem-se,

$$\nu_* = \sqrt{c_1}(\varepsilon_*) \quad (6.12)$$

No choque estacionário vale a seguinte relação entre ε_* e ε_{**}

$$c_1 \varepsilon_* = c_2 |\varepsilon_{**}| \varepsilon_{**} \quad (6.13)$$

Os estados $(\varepsilon_{**}, \nu_*)$ e (ε_R, ν_R) , podem ser conectados tanto por uma rarefação-2 quanto por um choque-2.

Os autovalores são dados por

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{\bar{\sigma}(\varepsilon)} = -\sqrt{2c_2|\varepsilon|} \\ \lambda_2 = \sqrt{\bar{\sigma}(\varepsilon)} = \sqrt{2c_2|\varepsilon|} \end{cases} \quad (6.14)$$

Supondo, inicialmente, que a conexão seja feita através de uma rarefação, o problema não apresenta descontinuidade e continua válida a equação diferencial, oriunda do problema de autovalor, que é dada por

$$-\sqrt{\bar{\sigma}(\varepsilon)} d\varepsilon - d\nu = 0 \Rightarrow \sqrt{2c_2|\varepsilon|} d\varepsilon = -d\nu \quad (6.15)$$

Integrando a equação (6.15), tem-se

$$\sqrt{2\mathcal{C}_2} \left(\frac{2}{3} \varepsilon |\varepsilon|^{1/2} \right) + \nu = \sqrt{2\mathcal{C}_2} \left(\frac{2}{3} \varepsilon_R |\varepsilon_R|^{1/2} \right) + \nu_R = \text{constante} \quad (6.16)$$

o que equivale a

$$\lambda_2 \left(\frac{2}{3} \varepsilon \right) + \nu = \text{constante} \quad (6.17)$$

Para existir uma rarefação-2 é necessário que o autovalor λ_2 , no estado (ε_R, ν_R) , seja maior que o autovalor λ_2 no estado (ε_*, ν_*) . No caso de $(\varepsilon_R, \nu_R) = (0, -U)$ tem-se que

$$\sqrt{2\mathcal{C}_2} \left(\frac{2}{3} \varepsilon_* |\varepsilon_*|^{1/2} \right) = -U - \nu_* \quad (6.18)$$

Para existir um choque-2 é necessário que o autovalor λ_2 , no estado (ε_R, ν_R) , seja menor que o autovalor λ_2 no estado (ε_*, ν_*) e que as condições de salto sejam satisfeitas. As condições de salto são dadas por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nu \\ \varepsilon \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \nu \end{bmatrix} = -\mathcal{S}_2 \Rightarrow \frac{\nu_* - \nu_R}{\varepsilon_* - \varepsilon_R} = \frac{\bar{\sigma}_* - \bar{\sigma}_R}{\nu_* - \nu_R} < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\nu_* - \nu_R}{\varepsilon_* - \varepsilon_R} = \frac{\mathcal{C}_2 \varepsilon_* |\varepsilon_*| - \mathcal{C}_2 \varepsilon_R |\varepsilon_R|}{\nu_* - \nu_R} < 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

e o autovalor é dado por $\sqrt{2\mathcal{C}_2 |\varepsilon_R|} = 0$, no estado à direita, e por $\sqrt{2\mathcal{C}_2 |\varepsilon_*|}$ no estado (ε_*, ν_*) .

No caso de $(\varepsilon_R, \nu_R) = (0, -U)$ tem-se que

$$\frac{\nu_* + \mathcal{U}}{\varepsilon_{**}} = \frac{c_2 \varepsilon_{**} |\varepsilon_{**}|}{\nu_* + \mathcal{U}} < 0 \quad (6.20)$$

Fica claro que os estados $(\varepsilon_{**}, \nu_*)$ e (ε_R, ν_R) serão conectados por um choque-2, uma vez que o fenômeno impõe que ε_{**} seja não positivo.

Assim, entre os estados $(\varepsilon_{**}, \nu_*)$ e (ε_R, ν_R) tem-se

$$\frac{\nu_* + \mathcal{U}}{\varepsilon_{**}} = \frac{c_2 \varepsilon_{**} |\varepsilon_{**}|}{\nu_* + \mathcal{U}} = -s_2 \Rightarrow \nu_* + \mathcal{U} \geq 0 \quad (6.21)$$

Dessa forma, ε_* , ε_{**} e ν_* são obtidos a partir do sistema abaixo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{**} &= - \left(\frac{(\nu_* + \mathcal{U})^2}{c_2} \right)^{1/3} \\ \nu_* &= \sqrt{c_1} (\varepsilon_*) \\ c_1 \varepsilon_* &= -c_2 (\varepsilon_{**})^2 \end{aligned} \quad (6.22)$$

onde já foi levado em conta que $\varepsilon_{**} \leq 0$. Levando em conta, também, que $\nu_* + \mathcal{U} \geq 0$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \nu_* &= \sqrt{c_2} (-\varepsilon_{**})^{3/2} - \mathcal{U} \\ \nu_* &= \sqrt{c_1} (\varepsilon_*) \\ c_1 \varepsilon_* &= -c_2 (\varepsilon_{**})^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

ou seja, ε_{**} é a única raiz não positiva de

$$\sqrt{c_2}(-\varepsilon_{**})^{3/2} + \frac{c_2(\varepsilon_{**})^2}{\sqrt{c_1}} = \mathcal{U} \quad (6.24)$$

enquanto

$$\nu_* = -\frac{c_2(\varepsilon_{**})^2}{\sqrt{c_1}} \quad \varepsilon_* = -\frac{c_2(\varepsilon_{**})^2}{c_1} \quad (6.25)$$

Devido a restrições cinemáticas, é preciso que $\sqrt{c_2} + \frac{c_2}{\sqrt{c_1}} > \mathcal{U}$, desde que $c_2 \leq c_1$. Se

$c_2 > c_1$ deve-se assegurar que $\varepsilon_* > -1$ em toda parte.

A solução completa do problema é dada por

$$(\varepsilon, \nu) = \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < x/t < -\sqrt{c_1} \\ (\varepsilon_*, \nu_*) & \text{para } -\sqrt{c_1} < x/t < 0 \\ (\varepsilon_{**}, \nu_*) & \text{para } 0 < x/t < \sqrt{2c_2|\varepsilon_{**}|} \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } \sqrt{2c_2|\varepsilon_{**}|} < x/t < \infty \end{cases} \quad (6.26)$$

A representação da solução apresentada na equação (6.26) no plano (X, t) é mostrada na figura 6.2.

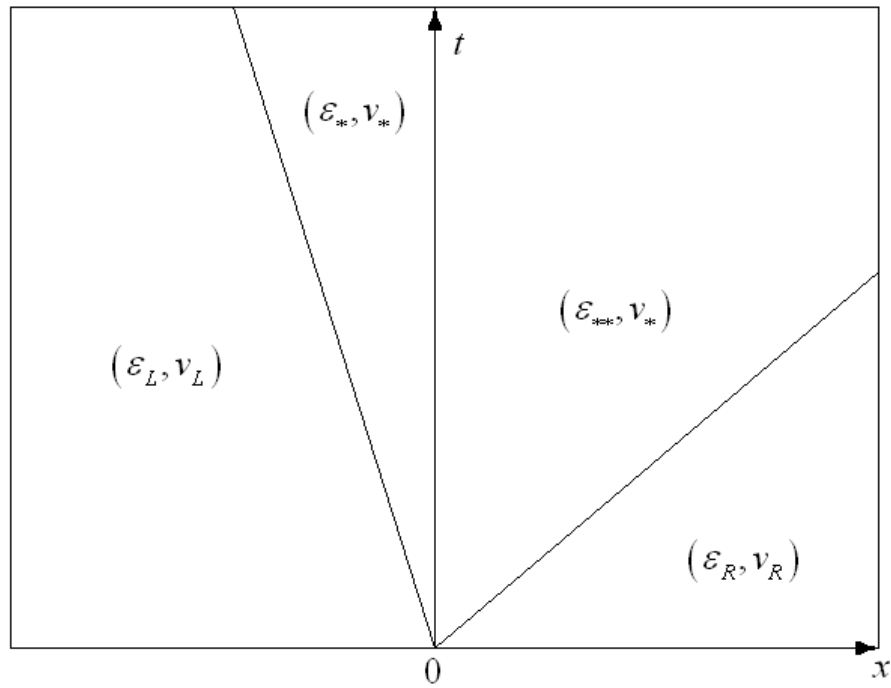


Figura 6.2. Solução do problema heterogêneo elástico linear / não linear, caso I, representada no plano (X, t) .

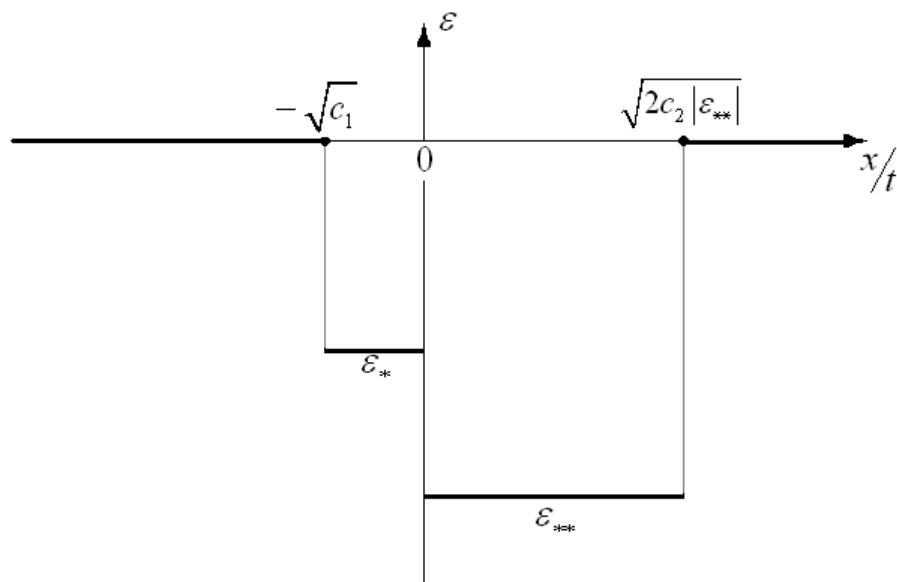


Figura 6.3. Deformação ε versus X/t , para problema heterogêneo elástico linear / não linear, representando o caso I.

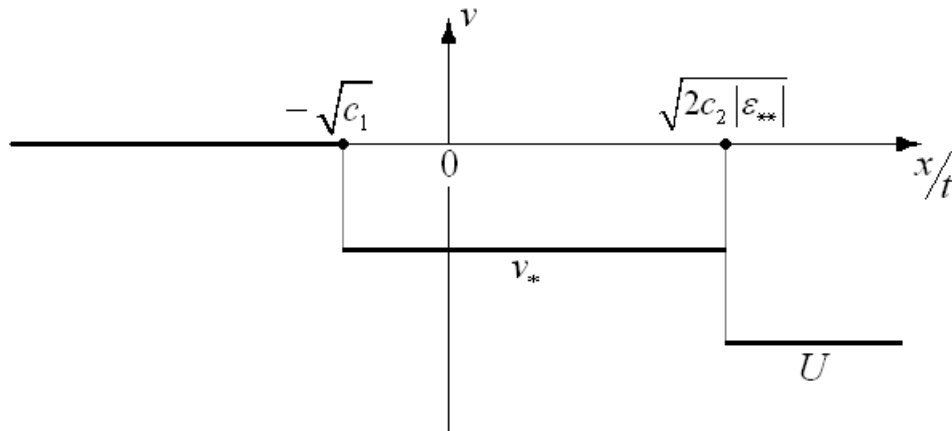


Figura 6.4. Velocidade v versus X/t , para problema heterogêneo elástico linear / não linear, representando o caso I.

As figuras 6.3 e 6.4 apresentam a deformação ε , e a velocidade v em função da variável de similaridade $\xi = X/t$. A partir destas figuras, observa-se que enquanto a deformação salta no ponto de colisão, a velocidade não salta, analogamente ao problema heterogêneo linear apresentado no capítulo 4.

A tabela 1 mostra alguns valores obtidos para a deformação no estado intermediário na barra 1, ε_* , a deformação no estado intermediário na barra 2, ε_{**} , e a velocidade intermediária v_* , apresentados nas três colunas à direita, calculados a partir de valores dados para U , c_1 e c_2 , mostrados nas três colunas à esquerda, considerando o comportamento da componente normal do tensor de Piola-Kirchhoff dada pela equação (6.2), que caracteriza o caso I.

A representação da solução apresentada na equação (6.26) no plano (X, t) é mostrada na figura 6.2.

Tabela 1. Valores obtidos para ε_* , ε_{**} , e ν_* a partir de alguns valores dados para a velocidade $\mathcal{U}$, e as constantes $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, para o caso I.

$\mathcal{U} =$	$\mathcal{C}_1 =$	$\mathcal{C}_2 =$	$\varepsilon_{**} =$	$\varepsilon_* =$	$\nu_* =$
0.200	0.50	0.50	-0.3196	-0.1022	-0.0722
0.200	0.50	1.00	-0.2407	-0.1159	-0.0819
0.200	0.50	1.50	-0.2033	-0.1240	-0.0877
0.200	0.50	2.00	-0.1802	-0.1299	-0.0918
0.200	0.50	2.50	-0.1640	-0.1344	-0.0950
0.200	0.50	3.00	-0.1517	-0.1381	-0.0977
0.200	0.50	3.50	-0.1420	-0.1412	-0.0999
0.200	0.50	4.00	-0.1341	-0.1439	-0.1018
0.200	1.00	0.50	-0.3421	-0.0585	-0.0585
0.200	1.00	1.00	-0.2599	-0.0675	-0.0675
0.200	1.00	1.50	-0.2207	-0.0730	-0.0730
0.200	1.00	2.00	-0.1963	-0.0770	-0.0770
0.200	1.00	2.50	-0.1791	-0.0802	-0.0802
0.200	1.00	3.00	-0.1661	-0.0828	-0.0828
0.200	1.00	3.50	-0.1558	-0.0850	-0.0850
0.200	1.00	4.00	-0.1474	-0.0869	-0.0869
0.200	1.50	0.50	-0.3539	-0.0417	-0.0511
0.200	1.50	1.00	-0.2701	-0.0487	-0.0596
0.200	1.50	1.50	-0.2301	-0.0529	-0.0648
0.200	1.50	2.00	-0.2051	-0.0561	-0.0687
0.200	1.50	2.50	-0.1874	-0.0585	-0.0717
0.200	1.50	3.00	-0.1741	-0.0606	-0.0742
0.200	1.50	3.50	-0.1635	-0.0623	-0.0764
0.200	1.50	4.00	-0.1548	-0.0639	-0.0782
0.200	2.00	0.50	-0.3616	-0.0327	-0.0462
0.200	2.00	1.00	-0.2770	-0.0384	-0.0542
0.200	2.00	1.50	-0.2364	-0.0419	-0.0593
0.200	2.00	2.00	-0.2110	-0.0445	-0.0630
0.200	2.00	2.50	-0.1931	-0.0466	-0.0659
0.200	2.00	3.00	-0.1795	-0.0483	-0.0683
0.200	2.00	3.50	-0.1687	-0.0498	-0.0704
0.200	2.00	4.00	-0.1598	-0.0511	-0.0722
0.200	2.50	0.50	-0.3672	-0.0270	-0.0426
0.200	2.50	1.00	-0.2820	-0.0318	-0.0503
0.200	2.50	1.50	-0.2410	-0.0348	-0.0551
0.200	2.50	2.00	-0.2154	-0.0371	-0.0587
0.200	2.50	2.50	-0.1972	-0.0389	-0.0615
0.200	2.50	3.00	-0.1835	-0.0404	-0.0639
0.200	2.50	3.50	-0.1726	-0.0417	-0.0659
0.200	2.50	4.00	-0.1636	-0.0428	-0.0677
0.200	3.00	0.50	-0.3716	-0.0230	-0.0399

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
0.200	3.00	1.00	-0.2858	-0.0272	-0.0472
0.200	3.00	1.50	-0.2446	-0.0299	-0.0518
0.200	3.00	2.00	-0.2188	-0.0319	-0.0553
0.200	3.00	2.50	-0.2005	-0.0335	-0.0580
0.200	3.00	3.00	-0.1866	-0.0348	-0.0603
0.200	3.00	3.50	-0.1756	-0.0360	-0.0623
0.200	3.00	4.00	-0.1665	-0.0370	-0.0641
0.200	3.50	0.50	-0.3750	-0.0201	-0.0376
0.200	3.50	1.00	-0.2890	-0.0239	-0.0446
0.200	3.50	1.50	-0.2476	-0.0263	-0.0491
0.200	3.50	2.00	-0.2216	-0.0281	-0.0525
0.200	3.50	2.50	-0.2032	-0.0295	-0.0552
0.200	3.50	3.00	-0.1892	-0.0307	-0.0574
0.200	3.50	3.50	-0.1781	-0.0317	-0.0594
0.200	3.50	4.00	-0.1690	-0.0326	-0.0611
0.200	4.00	0.50	-0.3779	-0.0179	-0.0357
0.200	4.00	1.00	-0.2916	-0.0213	-0.0425
0.200	4.00	1.50	-0.2500	-0.0234	-0.0469
0.200	4.00	2.00	-0.2239	-0.0251	-0.0501
0.200	4.00	2.50	-0.2054	-0.0264	-0.0528
0.200	4.00	3.00	-0.1914	-0.0275	-0.0550
0.200	4.00	3.50	-0.1802	-0.0284	-0.0568
0.200	4.00	4.00	-0.1710	-0.0293	-0.0585
0.400	0.50	0.50	-0.4814	-0.2317	-0.1638
0.400	0.50	1.00	-0.3604	-0.2597	-0.1837
0.400	0.50	1.50	-0.3034	-0.2762	-0.1953
0.400	0.50	2.00	-0.2682	-0.2878	-0.2035
0.400	0.50	2.50	-0.2436	-0.2968	-0.2099
0.400	0.50	3.00	-0.2251	-0.3041	-0.2150
0.400	0.50	3.50	-0.2105	-0.3102	-0.2193
0.400	0.50	4.00	-0.1986	-0.3154	-0.2230
0.400	1.00	0.50	-0.5197	-0.1351	-0.1351
0.400	1.00	1.00	-0.3925	-0.1541	-0.1541
0.400	1.00	1.50	-0.3322	-0.1655	-0.1655
0.400	1.00	2.00	-0.2947	-0.1737	-0.1737
0.400	1.00	2.50	-0.2684	-0.1801	-0.1801
0.400	1.00	3.00	-0.2486	-0.1854	-0.1854
0.400	1.00	3.50	-0.2329	-0.1898	-0.1898
0.400	1.00	4.00	-0.2200	-0.1936	-0.1936
0.400	1.50	0.50	-0.5403	-0.0973	-0.1192
0.400	1.50	1.00	-0.4101	-0.1121	-0.1373
0.400	1.50	1.50	-0.3481	-0.1212	-0.1484
0.400	1.50	2.00	-0.3095	-0.1277	-0.1565
0.400	1.50	2.50	-0.2824	-0.1329	-0.1628
0.400	1.50	3.00	-0.2618	-0.1371	-0.1679
0.400	1.50	3.50	-0.2456	-0.1407	-0.1723

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
0.400	1.50	4.00	-0.2322	-0.1438	-0.1762
0.400	2.00	0.50	-0.5539	-0.0767	-0.1085
0.400	2.00	1.00	-0.4220	-0.0890	-0.1259
0.400	2.00	1.50	-0.3589	-0.0966	-0.1366
0.400	2.00	2.00	-0.3196	-0.1022	-0.1445
0.400	2.00	2.50	-0.2919	-0.1065	-0.1506
0.400	2.00	3.00	-0.2709	-0.1101	-0.1557
0.400	2.00	3.50	-0.2543	-0.1132	-0.1601
0.400	2.00	4.00	-0.2407	-0.1159	-0.1638
0.400	2.50	0.50	-0.5639	-0.0636	-0.1006
0.400	2.50	1.00	-0.4307	-0.0742	-0.1173
0.400	2.50	1.50	-0.3670	-0.0808	-0.1277
0.400	2.50	2.00	-0.3271	-0.0856	-0.1354
0.400	2.50	2.50	-0.2991	-0.0894	-0.1414
0.400	2.50	3.00	-0.2778	-0.0926	-0.1464
0.400	2.50	3.50	-0.2609	-0.0953	-0.1507
0.400	2.50	4.00	-0.2471	-0.0977	-0.1544
0.400	3.00	0.50	-0.5717	-0.0545	-0.0943
0.400	3.00	1.00	-0.4376	-0.0638	-0.1105
0.400	3.00	1.50	-0.3733	-0.0697	-0.1207
0.400	3.00	2.00	-0.3331	-0.0740	-0.1281
0.400	3.00	2.50	-0.3047	-0.0774	-0.1340
0.400	3.00	3.00	-0.2832	-0.0802	-0.1389
0.400	3.00	3.50	-0.2661	-0.0826	-0.1431
0.400	3.00	4.00	-0.2521	-0.0848	-0.1468
0.400	3.50	0.50	-0.5780	-0.0477	-0.0893
0.400	3.50	1.00	-0.4432	-0.0561	-0.1050
0.400	3.50	1.50	-0.3785	-0.0614	-0.1148
0.400	3.50	2.00	-0.3380	-0.0653	-0.1221
0.400	3.50	2.50	-0.3094	-0.0684	-0.1279
0.400	3.50	3.00	-0.2877	-0.0709	-0.1327
0.400	3.50	3.50	-0.2705	-0.0732	-0.1369
0.400	3.50	4.00	-0.2563	-0.0751	-0.1405
0.400	4.00	0.50	-0.5832	-0.0425	-0.0850
0.400	4.00	1.00	-0.4479	-0.0501	-0.1003
0.400	4.00	1.50	-0.3828	-0.0550	-0.1099
0.400	4.00	2.00	-0.3421	-0.0585	-0.1170
0.400	4.00	2.50	-0.3133	-0.0614	-0.1227
0.400	4.00	3.00	-0.2915	-0.0637	-0.1274
0.400	4.00	3.50	-0.2741	-0.0658	-0.1315
0.400	4.00	4.00	-0.2599	-0.0675	-0.1351
0.600	0.50	0.50	-0.6100	-0.3721	-0.2631
0.600	0.50	1.00	-0.4551	-0.4143	-0.2930
0.600	0.50	1.50	-0.3825	-0.4388	-0.3103
0.600	0.50	2.00	-0.3377	-0.4561	-0.3225
0.600	0.50	2.50	-0.3064	-0.4693	-0.3319

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
0.600	0.50	3.00	-0.2829	-0.4800	-0.3394
0.600	0.50	3.50	-0.2643	-0.4890	-0.3458
0.600	0.50	4.00	-0.2492	-0.4967	-0.3512
0.600	1.00	0.50	-0.6620	-0.2191	-0.2191
0.600	1.00	1.00	-0.4983	-0.2483	-0.2483
0.600	1.00	1.50	-0.4208	-0.2656	-0.2656
0.600	1.00	2.00	-0.3728	-0.2780	-0.2780
0.600	1.00	2.50	-0.3392	-0.2876	-0.2876
0.600	1.00	3.00	-0.3138	-0.2955	-0.2955
0.600	1.00	3.50	-0.2938	-0.3021	-0.3021
0.600	1.00	4.00	-0.2774	-0.3078	-0.3078
0.600	1.50	0.50	-0.6902	-0.1588	-0.1945
0.600	1.50	1.00	-0.5222	-0.1818	-0.2226
0.600	1.50	1.50	-0.4424	-0.1957	-0.2397
0.600	1.50	2.00	-0.3928	-0.2057	-0.2519
0.600	1.50	2.50	-0.3579	-0.2135	-0.2615
0.600	1.50	3.00	-0.3316	-0.2199	-0.2693
0.600	1.50	3.50	-0.3107	-0.2253	-0.2759
0.600	1.50	4.00	-0.2937	-0.2300	-0.2817
0.600	2.00	0.50	-0.7091	-0.1257	-0.1778
0.600	2.00	1.00	-0.5384	-0.1449	-0.2050
0.600	2.00	1.50	-0.4570	-0.1567	-0.2216
0.600	2.00	2.00	-0.4064	-0.1652	-0.2336
0.600	2.00	2.50	-0.3708	-0.1718	-0.2430
0.600	2.00	3.00	-0.3438	-0.1773	-0.2508
0.600	2.00	3.50	-0.3225	-0.1820	-0.2574
0.600	2.00	4.00	-0.3050	-0.1861	-0.2631
0.600	2.50	0.50	-0.7230	-0.1045	-0.1653
0.600	2.50	1.00	-0.5504	-0.1212	-0.1916
0.600	2.50	1.50	-0.4680	-0.1314	-0.2078
0.600	2.50	2.00	-0.4167	-0.1389	-0.2196
0.600	2.50	2.50	-0.3805	-0.1448	-0.2289
0.600	2.50	3.00	-0.3531	-0.1496	-0.2366
0.600	2.50	3.50	-0.3314	-0.1538	-0.2431
0.600	2.50	4.00	-0.3136	-0.1573	-0.2488
0.600	3.00	0.50	-0.7339	-0.0898	-0.1555
0.600	3.00	1.00	-0.5599	-0.1045	-0.1810
0.600	3.00	1.50	-0.4767	-0.1136	-0.1968
0.600	3.00	2.00	-0.4248	-0.1203	-0.2084
0.600	3.00	2.50	-0.3882	-0.1256	-0.2175
0.600	3.00	3.00	-0.3605	-0.1300	-0.2251
0.600	3.00	3.50	-0.3385	-0.1337	-0.2315
0.600	3.00	4.00	-0.3205	-0.1369	-0.2372
0.600	3.50	0.50	-0.7427	-0.0788	-0.1474
0.600	3.50	1.00	-0.5677	-0.0921	-0.1723
0.600	3.50	1.50	-0.4839	-0.1004	-0.1877

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
0.600	3.50	2.00	-0.4315	-0.1064	-0.1991
0.600	3.50	2.50	-0.3946	-0.1112	-0.2081
0.600	3.50	3.00	-0.3666	-0.1152	-0.2155
0.600	3.50	3.50	-0.3444	-0.1186	-0.2219
0.600	3.50	4.00	-0.3262	-0.1216	-0.2275
0.600	4.00	0.50	-0.7501	-0.0703	-0.1407
0.600	4.00	1.00	-0.5742	-0.0824	-0.1649
0.600	4.00	1.50	-0.4899	-0.0900	-0.1800
0.600	4.00	2.00	-0.4372	-0.0956	-0.1912
0.600	4.00	2.50	-0.4000	-0.1000	-0.2000
0.600	4.00	3.00	-0.3718	-0.1037	-0.2073
0.600	4.00	3.50	-0.3494	-0.1068	-0.2136
0.600	4.00	4.00	-0.3310	-0.1096	-0.2191
0.800	0.50	0.50	-0.7207	-0.5195	-0.3673
0.800	0.50	1.00	-0.5365	-0.5757	-0.4070
0.800	0.50	1.50	-0.4502	-0.6081	-0.4300
0.800	0.50	2.00	-0.3971	-0.6308	-0.4461
0.800	0.50	2.50	-0.3601	-0.6482	-0.4584
0.800	0.50	3.00	-0.3322	-0.6623	-0.4683
0.800	0.50	3.50	-0.3103	-0.6740	-0.4766
0.800	0.50	4.00	-0.2924	-0.6841	-0.4837
0.800	1.00	0.50	-0.7851	-0.3082	-0.3082
0.800	1.00	1.00	-0.5894	-0.3474	-0.3474
0.800	1.00	1.50	-0.4971	-0.3707	-0.3707
0.800	1.00	2.00	-0.4400	-0.3872	-0.3872
0.800	1.00	2.50	-0.4000	-0.4000	-0.4000
0.800	1.00	3.00	-0.3699	-0.4104	-0.4104
0.800	1.00	3.50	-0.3461	-0.4191	-0.4191
0.800	1.00	4.00	-0.3266	-0.4267	-0.4267
0.800	1.50	0.50	-0.8203	-0.2243	-0.2747
0.800	1.50	1.00	-0.6191	-0.2555	-0.3129
0.800	1.50	1.50	-0.5237	-0.2742	-0.3359
0.800	1.50	2.00	-0.4645	-0.2877	-0.3523
0.800	1.50	2.50	-0.4229	-0.2981	-0.3651
0.800	1.50	3.00	-0.3916	-0.3067	-0.3756
0.800	1.50	3.50	-0.3668	-0.3139	-0.3844
0.800	1.50	4.00	-0.3465	-0.3201	-0.3921
0.800	2.00	0.50	-0.8439	-0.1781	-0.2518
0.800	2.00	1.00	-0.6392	-0.2043	-0.2889
0.800	2.00	1.50	-0.5419	-0.2202	-0.3115
0.800	2.00	2.00	-0.4814	-0.2317	-0.3277
0.800	2.00	2.50	-0.4388	-0.2407	-0.3404
0.800	2.00	3.00	-0.4067	-0.2481	-0.3508
0.800	2.00	3.50	-0.3812	-0.2543	-0.3597
0.800	2.00	4.00	-0.3604	-0.2597	-0.3673
0.800	2.50	0.50	-0.8614	-0.1484	-0.2347

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
0.800	2.50	1.00	-0.6543	-0.1712	-0.2708
0.800	2.50	1.50	-0.5556	-0.1852	-0.2928
0.800	2.50	2.00	-0.4941	-0.1953	-0.3088
0.800	2.50	2.50	-0.4508	-0.2033	-0.3214
0.800	2.50	3.00	-0.4181	-0.2098	-0.3317
0.800	2.50	3.50	-0.3922	-0.2153	-0.3405
0.800	2.50	4.00	-0.3710	-0.2202	-0.3481
0.800	3.00	0.50	-0.8752	-0.1276	-0.2211
0.800	3.00	1.00	-0.6662	-0.1479	-0.2562
0.800	3.00	1.50	-0.5664	-0.1604	-0.2779
0.800	3.00	2.00	-0.5043	-0.1695	-0.2936
0.800	3.00	2.50	-0.4604	-0.1767	-0.3060
0.800	3.00	3.00	-0.4273	-0.1826	-0.3162
0.800	3.00	3.50	-0.4010	-0.1876	-0.3249
0.800	3.00	4.00	-0.3795	-0.1920	-0.3325
0.800	3.50	0.50	-0.8863	-0.1122	-0.2100
0.800	3.50	1.00	-0.6760	-0.1306	-0.2442
0.800	3.50	1.50	-0.5754	-0.1419	-0.2654
0.800	3.50	2.00	-0.5126	-0.1502	-0.2809
0.800	3.50	2.50	-0.4684	-0.1567	-0.2932
0.800	3.50	3.00	-0.4349	-0.1621	-0.3033
0.800	3.50	3.50	-0.4083	-0.1667	-0.3119
0.800	3.50	4.00	-0.3865	-0.1707	-0.3194
0.800	4.00	0.50	-0.8957	-0.1003	-0.2006
0.800	4.00	1.00	-0.6842	-0.1170	-0.2341
0.800	4.00	1.50	-0.5830	-0.1274	-0.2549
0.800	4.00	2.00	-0.5197	-0.1351	-0.2701
0.800	4.00	2.50	-0.4751	-0.1411	-0.2822
0.800	4.00	3.00	-0.4413	-0.1461	-0.2922
0.800	4.00	3.50	-0.4145	-0.1504	-0.3007
0.800	4.00	4.00	-0.3925	-0.1541	-0.3082
1.000	0.50	0.50	-0.8198	-0.6720	-0.4752
1.000	0.50	1.00	-0.6091	-0.7420	-0.5247
1.000	0.50	1.50	-0.5106	-0.7822	-0.5531
1.000	0.50	2.00	-0.4501	-0.8103	-0.5730
1.000	0.50	2.50	-0.4079	-0.8318	-0.5881
1.000	0.50	3.00	-0.3762	-0.8490	-0.6004
1.000	0.50	3.50	-0.3512	-0.8635	-0.6106
1.000	0.50	4.00	-0.3309	-0.8759	-0.6193
1.000	1.00	0.50	-0.8954	-0.4009	-0.4009
1.000	1.00	1.00	-0.6710	-0.4503	-0.4503
1.000	1.00	1.50	-0.5653	-0.4794	-0.4794
1.000	1.00	2.00	-0.5000	-0.5000	-0.5000
1.000	1.00	2.50	-0.4543	-0.5159	-0.5159
1.000	1.00	3.00	-0.4198	-0.5288	-0.5288
1.000	1.00	3.50	-0.3927	-0.5397	-0.5397

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
1.000	1.00	4.00	-0.3705	-0.5490	-0.5490
1.000	1.50	0.50	-0.9371	-0.2927	-0.3585
1.000	1.50	1.00	-0.7059	-0.3322	-0.4069
1.000	1.50	1.50	-0.5965	-0.3558	-0.4358
1.000	1.50	2.00	-0.5287	-0.3726	-0.4564
1.000	1.50	2.50	-0.4811	-0.3857	-0.4724
1.000	1.50	3.00	-0.4452	-0.3964	-0.4855
1.000	1.50	3.50	-0.4168	-0.4054	-0.4965
1.000	1.50	4.00	-0.3936	-0.4132	-0.5061
1.000	2.00	0.50	-0.9653	-0.2329	-0.3294
1.000	2.00	1.00	-0.7298	-0.2663	-0.3766
1.000	2.00	1.50	-0.6180	-0.2864	-0.4050
1.000	2.00	2.00	-0.5485	-0.3009	-0.4255
1.000	2.00	2.50	-0.4997	-0.3122	-0.4415
1.000	2.00	3.00	-0.4629	-0.3214	-0.4545
1.000	2.00	3.50	-0.4337	-0.3292	-0.4656
1.000	2.00	4.00	-0.4099	-0.3360	-0.4752
1.000	2.50	0.50	-0.9862	-0.1945	-0.3075
1.000	2.50	1.00	-0.7477	-0.2236	-0.3535
1.000	2.50	1.50	-0.6341	-0.2413	-0.3815
1.000	2.50	2.00	-0.5635	-0.2541	-0.4017
1.000	2.50	2.50	-0.5139	-0.2641	-0.4175
1.000	2.50	3.00	-0.4764	-0.2723	-0.4305
1.000	2.50	3.50	-0.4466	-0.2793	-0.4416
1.000	2.50	4.00	-0.4223	-0.2853	-0.4512
1.000	3.00	1.00	-0.7618	-0.1935	-0.3351
1.000	3.00	1.50	-0.6470	-0.2093	-0.3626
1.000	3.00	2.00	-0.5755	-0.2208	-0.3825
1.000	3.00	2.50	-0.5252	-0.2299	-0.3982
1.000	3.00	3.00	-0.4872	-0.2373	-0.4111
1.000	3.00	3.50	-0.4570	-0.2437	-0.4220
1.000	3.00	4.00	-0.4323	-0.2492	-0.4316
1.000	3.50	1.00	-0.7735	-0.1709	-0.3198
1.000	3.50	1.50	-0.6577	-0.1854	-0.3468
1.000	3.50	2.00	-0.5855	-0.1959	-0.3664
1.000	3.50	2.50	-0.5346	-0.2042	-0.3819
1.000	3.50	3.00	-0.4961	-0.2110	-0.3947
1.000	3.50	3.50	-0.4656	-0.2168	-0.4056
1.000	3.50	4.00	-0.4406	-0.2219	-0.4151
1.000	4.00	1.00	-0.7833	-0.1534	-0.3068
1.000	4.00	1.50	-0.6667	-0.1667	-0.3333
1.000	4.00	2.00	-0.5939	-0.1764	-0.3527
1.000	4.00	2.50	-0.5426	-0.1840	-0.3680
1.000	4.00	3.00	-0.5038	-0.1903	-0.3807
1.000	4.00	3.50	-0.4730	-0.1957	-0.3915
1.000	4.00	4.00	-0.4477	-0.2004	-0.4009

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
1.200	0.50	0.50	-0.9103	-0.8286	-0.5859
1.200	0.50	1.00	-0.6753	-0.9122	-0.6450
1.200	0.50	1.50	-0.5657	-0.9601	-0.6789
1.200	0.50	2.00	-0.4984	-0.9934	-0.7025
1.200	1.00	0.50	-0.9965	-0.4966	-0.4966
1.200	1.00	1.00	-0.7457	-0.5561	-0.5561
1.200	1.00	1.50	-0.6277	-0.5910	-0.5910
1.200	1.00	2.00	-0.5548	-0.6156	-0.6156
1.200	1.00	2.50	-0.5038	-0.6346	-0.6346
1.200	1.00	3.00	-0.4655	-0.6500	-0.6500
1.200	1.00	3.50	-0.4352	-0.6629	-0.6629
1.200	1.00	4.00	-0.4105	-0.6740	-0.6740
1.200	1.50	1.00	-0.7855	-0.4114	-0.5038
1.200	1.50	1.50	-0.6631	-0.4398	-0.5386
1.200	1.50	2.00	-0.5874	-0.4600	-0.5634
1.200	1.50	2.50	-0.5342	-0.4757	-0.5826
1.200	1.50	3.00	-0.4942	-0.4885	-0.5983
1.200	1.50	3.50	-0.4626	-0.4992	-0.6114
1.200	1.50	4.00	-0.4367	-0.5085	-0.6228
1.200	2.00	1.00	-0.8128	-0.3303	-0.4672
1.200	2.00	1.50	-0.6877	-0.3547	-0.5016
1.200	2.00	2.00	-0.6100	-0.3721	-0.5262
1.200	2.00	2.50	-0.5555	-0.3857	-0.5454
1.200	2.00	3.00	-0.5143	-0.3968	-0.5611
1.200	2.00	3.50	-0.4818	-0.4062	-0.5744
1.200	2.00	4.00	-0.4551	-0.4143	-0.5859
1.200	2.50	1.00	-0.8334	-0.2778	-0.4392
1.200	2.50	1.50	-0.7062	-0.2992	-0.4731
1.200	2.50	2.00	-0.6272	-0.3147	-0.4976
1.200	2.50	2.50	-0.5716	-0.3268	-0.5166
1.200	2.50	3.00	-0.5297	-0.3367	-0.5323
1.200	2.50	3.50	-0.4965	-0.3451	-0.5456
1.200	2.50	4.00	-0.4693	-0.3523	-0.5571
1.200	3.00	1.00	-0.8497	-0.2406	-0.4168
1.200	3.00	1.50	-0.7210	-0.2599	-0.4502
1.200	3.00	2.00	-0.6409	-0.2739	-0.4743
1.200	3.00	2.50	-0.5846	-0.2848	-0.4933
1.200	3.00	3.00	-0.5420	-0.2938	-0.5088
1.200	3.00	3.50	-0.5083	-0.3014	-0.5221
1.200	3.00	4.00	-0.4807	-0.3080	-0.5335
1.200	3.50	1.00	-0.8631	-0.2128	-0.3982
1.200	3.50	1.50	-0.7332	-0.2304	-0.4311
1.200	3.50	2.00	-0.6523	-0.2432	-0.4549
1.200	3.50	2.50	-0.5954	-0.2532	-0.4737
1.200	3.50	3.00	-0.5523	-0.2614	-0.4891
1.200	3.50	3.50	-0.5181	-0.2685	-0.5022

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
1.200	3.50	4.00	-0.4902	-0.2746	-0.5137
1.200	4.00	1.00	-0.8744	-0.1912	-0.3823
1.200	4.00	1.50	-0.7436	-0.2073	-0.4147
1.200	4.00	2.00	-0.6620	-0.2191	-0.4383
1.200	4.00	2.50	-0.6045	-0.2284	-0.4568
1.200	4.00	3.00	-0.5610	-0.2361	-0.4721
1.200	4.00	3.50	-0.5265	-0.2426	-0.4852
1.200	4.00	4.00	-0.4983	-0.2483	-0.4966
1.400	0.50	0.50	-0.9942	-0.9885	-0.6990
1.400	1.00	1.00	-0.8150	-0.6642	-0.6642
1.400	1.00	1.50	-0.6855	-0.7049	-0.7049
1.400	1.00	2.00	-0.6056	-0.7335	-0.7335
1.400	1.00	2.50	-0.5497	-0.7555	-0.7555
1.400	1.00	3.00	-0.5077	-0.7734	-0.7734
1.400	1.00	3.50	-0.4746	-0.7883	-0.7883
1.400	1.00	4.00	-0.4475	-0.8012	-0.8012
1.400	1.50	1.00	-0.8595	-0.4925	-0.6032
1.400	1.50	1.50	-0.7251	-0.5257	-0.6439
1.400	1.50	2.00	-0.6419	-0.5493	-0.6728
1.400	1.50	2.50	-0.5836	-0.5676	-0.6951
1.400	1.50	3.00	-0.5397	-0.5825	-0.7134
1.400	1.50	3.50	-0.5050	-0.5950	-0.7287
1.400	1.50	4.00	-0.4766	-0.6058	-0.7419
1.400	2.00	1.00	-0.8901	-0.3961	-0.5602
1.400	2.00	1.50	-0.7525	-0.4247	-0.6006
1.400	2.00	2.00	-0.6671	-0.4451	-0.6294
1.400	2.00	2.50	-0.6072	-0.4609	-0.6518
1.400	2.00	3.00	-0.5621	-0.4739	-0.6701
1.400	2.00	3.50	-0.5263	-0.4848	-0.6856
1.400	2.00	4.00	-0.4971	-0.4943	-0.6990
1.400	2.50	1.00	-0.9132	-0.3335	-0.5274
1.400	2.50	1.50	-0.7732	-0.3587	-0.5672
1.400	2.50	2.00	-0.6863	-0.3769	-0.5959
1.400	2.50	2.50	-0.6253	-0.3910	-0.6182
1.400	2.50	3.00	-0.5792	-0.4026	-0.6365
1.400	2.50	3.50	-0.5427	-0.4124	-0.6520
1.400	2.50	4.00	-0.5129	-0.4208	-0.6654
1.400	3.00	1.00	-0.9315	-0.2892	-0.5010
1.400	3.00	1.50	-0.7898	-0.3119	-0.5403
1.400	3.00	2.00	-0.7018	-0.3283	-0.5686
1.400	3.00	2.50	-0.6398	-0.3411	-0.5908
1.400	3.00	3.00	-0.5930	-0.3516	-0.6091
1.400	3.00	3.50	-0.5559	-0.3606	-0.6245
1.400	3.00	4.00	-0.5256	-0.3683	-0.6379
1.400	3.50	1.00	-0.9466	-0.2560	-0.4790
1.400	3.50	1.50	-0.8036	-0.2767	-0.5178

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
1.400	3.50	2.00	-0.7145	-0.2917	-0.5458
1.400	3.50	2.50	-0.6519	-0.3035	-0.5678
1.400	3.50	3.00	-0.6045	-0.3132	-0.5860
1.400	3.50	3.50	-0.5670	-0.3214	-0.6014
1.400	3.50	4.00	-0.5362	-0.3286	-0.6147
1.400	4.00	1.00	-0.9594	-0.2301	-0.4602
1.400	4.00	1.50	-0.8152	-0.2492	-0.4985
1.400	4.00	2.00	-0.7254	-0.2631	-0.5262
1.400	4.00	2.50	-0.6622	-0.2740	-0.5481
1.400	4.00	3.00	-0.6143	-0.2830	-0.5661
1.400	4.00	3.50	-0.5764	-0.2907	-0.5814
1.400	4.00	4.00	-0.5453	-0.2973	-0.5947
1.600	1.00	1.00	-0.8800	-0.7744	-0.7744
1.600	1.00	1.50	-0.7397	-0.8208	-0.8208
1.600	1.00	2.00	-0.6532	-0.8534	-0.8534
1.600	1.00	2.50	-0.5928	-0.8784	-0.8784
1.600	1.00	3.00	-0.5473	-0.8987	-0.8987
1.600	1.00	3.50	-0.5115	-0.9157	-0.9157
1.600	1.00	4.00	-0.4822	-0.9302	-0.9302
1.600	1.50	1.00	-0.9290	-0.5753	-0.7046
1.600	1.50	1.50	-0.7832	-0.6133	-0.7512
1.600	1.50	2.00	-0.6930	-0.6403	-0.7842
1.600	1.50	2.50	-0.6298	-0.6611	-0.8097
1.600	1.50	3.00	-0.5823	-0.6781	-0.8305
1.600	1.50	3.50	-0.5447	-0.6923	-0.8479
1.600	1.50	4.00	-0.5140	-0.7046	-0.8629
1.600	2.00	1.00	-0.9627	-0.4634	-0.6554
1.600	2.00	1.50	-0.8133	-0.4961	-0.7016
1.600	2.00	2.00	-0.7207	-0.5195	-0.7346
1.600	2.00	2.50	-0.6558	-0.5376	-0.7603
1.600	2.00	3.00	-0.6068	-0.5524	-0.7812
1.600	2.00	3.50	-0.5681	-0.5649	-0.7988
1.600	2.00	4.00	-0.5365	-0.5757	-0.8141
1.600	2.50	1.00	-0.9882	-0.3906	-0.6176
1.600	2.50	1.50	-0.8362	-0.4196	-0.6634
1.600	2.50	2.00	-0.7419	-0.4404	-0.6963
1.600	2.50	2.50	-0.6757	-0.4565	-0.7218
1.600	2.50	3.00	-0.6257	-0.4698	-0.7428
1.600	2.50	3.50	-0.5861	-0.4810	-0.7605
1.600	2.50	4.00	-0.5538	-0.4907	-0.7758
1.600	3.00	1.50	-0.8546	-0.3651	-0.6325
1.600	3.00	2.00	-0.7589	-0.3840	-0.6650
1.600	3.00	2.50	-0.6917	-0.3987	-0.6905
1.600	3.00	3.00	-0.6409	-0.4107	-0.7114
1.600	3.00	3.50	-0.6007	-0.4209	-0.7291
1.600	3.00	4.00	-0.5677	-0.4298	-0.7444

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
1.600	3.50	1.50	-0.8698	-0.3242	-0.6065
1.600	3.50	2.00	-0.7730	-0.3415	-0.6388
1.600	3.50	2.50	-0.7050	-0.3550	-0.6641
1.600	3.50	3.00	-0.6535	-0.3661	-0.6849
1.600	3.50	3.50	-0.6128	-0.3755	-0.7026
1.600	3.50	4.00	-0.5794	-0.3837	-0.7179
1.600	4.00	1.50	-0.8827	-0.2922	-0.5843
1.600	4.00	2.00	-0.7851	-0.3082	-0.6163
1.600	4.00	2.50	-0.7163	-0.3207	-0.6414
1.600	4.00	3.00	-0.6644	-0.3310	-0.6621
1.600	4.00	3.50	-0.6232	-0.3398	-0.6796
1.600	4.00	4.00	-0.5894	-0.3474	-0.6949
1.800	1.00	1.00	-0.9415	-0.8864	-0.8864
1.800	1.00	1.50	-0.7910	-0.9384	-0.9384
1.800	1.00	2.00	-0.6982	-0.9750	-0.9750
1.800	1.50	1.00	-0.9947	-0.6597	-0.8079
1.800	1.50	1.50	-0.8381	-0.7024	-0.8603
1.800	1.50	2.00	-0.7413	-0.7327	-0.8974
1.800	1.50	2.50	-0.6735	-0.7561	-0.9260
1.800	1.50	3.00	-0.6225	-0.7751	-0.9493
1.800	1.50	3.50	-0.5822	-0.7910	-0.9688
1.800	1.50	4.00	-0.5494	-0.8048	-0.9856
1.800	2.00	1.50	-0.8709	-0.5689	-0.8045
1.800	2.00	2.00	-0.7715	-0.5952	-0.8417
1.800	2.00	2.50	-0.7017	-0.6156	-0.8705
1.800	2.00	3.00	-0.6492	-0.6322	-0.8940
1.800	2.00	3.50	-0.6077	-0.6462	-0.9138
1.800	2.00	4.00	-0.5737	-0.6583	-0.9309
1.800	2.50	1.50	-0.8959	-0.4816	-0.7614
1.800	2.50	2.00	-0.7945	-0.5050	-0.7985
1.800	2.50	2.50	-0.7233	-0.5232	-0.8273
1.800	2.50	3.00	-0.6697	-0.5381	-0.8509
1.800	2.50	3.50	-0.6272	-0.5507	-0.8707
1.800	2.50	4.00	-0.5925	-0.5616	-0.8880
1.800	3.00	1.50	-0.9159	-0.4194	-0.7265
1.800	3.00	2.00	-0.8130	-0.4407	-0.7633
1.800	3.00	2.50	-0.7407	-0.4573	-0.7920
1.800	3.00	3.00	-0.6862	-0.4708	-0.8155
1.800	3.00	3.50	-0.6430	-0.4823	-0.8354
1.800	3.00	4.00	-0.6076	-0.4923	-0.8527
1.800	3.50	1.50	-0.9325	-0.3727	-0.6972
1.800	3.50	2.00	-0.8284	-0.3922	-0.7337
1.800	3.50	2.50	-0.7552	-0.4074	-0.7622
1.800	3.50	3.00	-0.7000	-0.4200	-0.7857
1.800	3.50	3.50	-0.6562	-0.4306	-0.8056
1.800	3.50	4.00	-0.6203	-0.4398	-0.8228

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
1.800	4.00	1.50	-0.9466	-0.3360	-0.6720
1.800	4.00	2.00	-0.8416	-0.3541	-0.7082
1.800	4.00	2.50	-0.7676	-0.3683	-0.7366
1.800	4.00	3.00	-0.7118	-0.3800	-0.7599
1.800	4.00	3.50	-0.6675	-0.3899	-0.7797
1.800	4.00	4.00	-0.6312	-0.3985	-0.7969
2.000	1.50	1.50	-0.8904	-0.7928	-0.9710
2.000	1.50	2.00	-0.7873	-0.8264	-1.0121
2.000	1.50	2.50	-0.7151	-0.8523	-1.0438
2.000	1.50	3.00	-0.6608	-0.8733	-1.0696
2.000	1.50	3.50	-0.6179	-0.8910	-1.0912
2.000	1.50	4.00	-0.5829	-0.9062	-1.1099
2.000	2.00	1.50	-0.9258	-0.6428	-0.9090
2.000	2.00	2.00	-0.8198	-0.6720	-0.9503
2.000	2.00	2.50	-0.7455	-0.6946	-0.9824
2.000	2.00	3.00	-0.6895	-0.7130	-1.0084
2.000	2.00	3.50	-0.6452	-0.7286	-1.0304
2.000	2.00	4.00	-0.6091	-0.7420	-1.0493
2.000	2.50	1.50	-0.9527	-0.5446	-0.8611
2.000	2.50	2.00	-0.8446	-0.5707	-0.9023
2.000	2.50	2.50	-0.7687	-0.5909	-0.9343
2.000	2.50	3.00	-0.7115	-0.6075	-0.9605
2.000	2.50	3.50	-0.6663	-0.6215	-0.9826
2.000	2.50	4.00	-0.6292	-0.6335	-1.0017
2.000	3.00	1.50	-0.9743	-0.4747	-0.8221
2.000	3.00	2.00	-0.8646	-0.4983	-0.8631
2.000	3.00	2.50	-0.7875	-0.5168	-0.8951
2.000	3.00	3.00	-0.7293	-0.5319	-0.9213
2.000	3.00	3.50	-0.6833	-0.5447	-0.9434
2.000	3.00	4.00	-0.6456	-0.5557	-0.9625
2.000	3.50	1.50	-0.9923	-0.4220	-0.7894
2.000	3.50	2.00	-0.8812	-0.4437	-0.8301
2.000	3.50	2.50	-0.8031	-0.4607	-0.8620
2.000	3.50	3.00	-0.7442	-0.4747	-0.8881
2.000	3.50	3.50	-0.6975	-0.4865	-0.9102
2.000	3.50	4.00	-0.6593	-0.4968	-0.9294
2.000	4.00	2.00	-0.8954	-0.4009	-0.8018
2.000	4.00	2.50	-0.8165	-0.4167	-0.8334
2.000	4.00	3.00	-0.7569	-0.4297	-0.8594
2.000	4.00	3.50	-0.7097	-0.4407	-0.8814
2.000	4.00	4.00	-0.6710	-0.4503	-0.9006

Um segundo exemplo, denotado por caso II, considera a colisão de duas barras semi-infinitas sendo a barra 1, à esquerda da colisão, elástica linear e a barra 2, à direita da colisão, elástica não linear, como no exemplo anterior. Porém neste exemplo a barra 2 é formada por um outro material elástico não linear, no qual a componente normal do tensor de Piola-Kirchhoff obedece a

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} c_1 \varepsilon, & \text{para } \mathcal{X} < 0 \\ c_2 (\varepsilon^2 + 2\varepsilon), & \text{para } \mathcal{X} > 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

sendo c_1 e c_2 constantes positivas. Neste caso, o problema de Riemann descrito pela equação (5.1) combinando às condições iniciais dadas pela equação (6.1) pode ser representado na configuração de referência como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial \mathcal{X}} &= 0 \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathcal{X}} &= 0 \\ \bar{\sigma} &= \begin{cases} c_1 \varepsilon, & \text{para } \mathcal{X} < 0 \\ c_2 (\varepsilon^2 + 2\varepsilon), & \text{para } \mathcal{X} > 0 \end{cases} \\ (\varepsilon, \nu) &= (\varepsilon_L, \nu_L) = (0, 0) \quad \text{para } \mathcal{X} < 0 \\ (\varepsilon, \nu) &= (\varepsilon_R, \nu_R) = (0, -U) \quad \text{para } \mathcal{X} > 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

No choque estacionário que ocorre no ponto da colisão ($\mathcal{X}=0$) tem-se a seguinte relação entre os estados intermediários da barra 1, ε_* e da barra 2, ε_{**}

$$c_1 \varepsilon_* = c_2 (\varepsilon_{**}^2 + 2\varepsilon_{**}) \quad (6.29)$$

Novamente, para conectar os estados $(\varepsilon_{**}, \nu_*)$ e (ε_R, ν_R) , pode-se ter uma rarefação-2 ou um choque-2.

Os autovalores são dados por

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{\bar{\sigma}^{\vee}(\varepsilon)} = -\sqrt{2c_2(\varepsilon+1)} \\ \lambda_2 = \sqrt{\bar{\sigma}^{\vee}(\varepsilon)} = \sqrt{2c_2(\varepsilon+1)} \end{cases} \quad (6.30)$$

Supondo, inicialmente, que a conexão seja uma rarefação, é válida a equação diferencial, oriunda do problema de autovalor, dada por

$$-\sqrt{\bar{\sigma}^{\vee}(\varepsilon)} d\varepsilon - d\nu = 0 \Rightarrow \sqrt{2c_2(\varepsilon+1)} d\varepsilon = -d\nu \quad (6.31)$$

Integrando a equação (6.31), vem que

$$\sqrt{2c_2} \left(\frac{2}{3}(\varepsilon+1)^{3/2} \right) + \nu = \sqrt{2c_2} \left(\frac{2}{3}(\varepsilon_R+1)^{3/2} \right) + \nu_R = \text{constante} \quad (6.32)$$

Para existir uma rarefação-2 é necessário que o autovalor λ_2 , no estado (ε_R, ν_R) , seja maior que o autovalor λ_2 no estado $(\varepsilon_{**}, \nu_*)$. No caso de $(\varepsilon_R, \nu_R) = (0, -\mathcal{U})$ tem-se

$$\sqrt{2c_2} \left(\frac{2}{3}(\varepsilon_{**}+1)^{3/2} \right) + \nu_* = \sqrt{2c_2} \left(\frac{2}{3} \right) - \mathcal{U} \Rightarrow \varepsilon_{**} = \left(\frac{3}{2} \left(\frac{-\mathcal{U} - \nu_*}{\sqrt{2c_2}} \right) + 1 \right)^{2/3} - 1 \quad (6.33)$$

Como o corpo não pode virar pelo avesso, não faz sentido ter $\varepsilon \leq -1$, logo a conexão será por rarefação-2.

É importante notar que, por restrições cinemáticas, esse problema só faz sentido se

$$\frac{2}{3}\sqrt{2c_2} - \mathcal{U} > \nu_* \quad (6.34)$$

Dessa forma, ε_* , ε_{**} e ν_* serão obtidos a partir do sistema a seguir

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{**} &= \left(\frac{3}{2} \left(\frac{-\mathcal{U} - \nu_*}{\sqrt{2c_2}} \right) + 1 \right)^{2/3} - 1 \\
\nu_* &= \sqrt{c_1}(\varepsilon_*) \\
c_1 \varepsilon_* &= c_2(\varepsilon_{**}^2 + 2\varepsilon_{**})
\end{aligned} \tag{6.35}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\nu_* &= \frac{\sqrt{8c_2}}{3} \left(1 - (\varepsilon_{**} + 1)^{3/2} \right) - \mathcal{U} \\
\nu_* &= \sqrt{c_1}(\varepsilon_*) \\
c_1 \varepsilon_* &= c_2(\varepsilon_{**}^2 + 2\varepsilon_{**})
\end{aligned} \tag{6.36}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\nu_* &= \frac{c_2(\varepsilon_{**}^2 + 2\varepsilon_{**})}{\sqrt{c_1}} \\
\varepsilon_* &= \frac{c_2(\varepsilon_{**}^2 + 2\varepsilon_{**})}{c_1}
\end{aligned} \tag{6.37}$$

onde ε_{**} é a única raiz não positiva de

$$\mathcal{U} = \frac{\sqrt{8c_2}}{3} \left(1 - (\varepsilon_{**} + 1)^{3/2} \right) - \frac{c_2(\varepsilon_{**}^2 + 2\varepsilon_{**})}{\sqrt{c_1}} \tag{6.38}$$

A solução completa do problema é dada por

$$(\varepsilon, \nu) = \begin{cases} (\varepsilon_L, \nu_L) & \text{para } -\infty < x/t < -\sqrt{c_1} \\ (\varepsilon_*, \nu_*) & \text{para } -\sqrt{c_1} < x/t < 0 \\ (\varepsilon_{**}, \nu_*) & \text{para } 0 < x/t < \sqrt{2c_2(\varepsilon_{**}+1)} \\ (\varepsilon, \nu) = (f(x/t), g(x/t)) & \text{para } \sqrt{2c_2(\varepsilon_{**}+1)} < x/t < \sqrt{2c_2} \\ (\varepsilon_R, \nu_R) & \text{para } \sqrt{2c_2} < x/t < \infty \end{cases} \quad (6.39)$$

onde $f(x/t)$ e $g(x/t)$ são dadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon = f(x/t) &= \frac{(x/t)^2}{2c_2} - 1 \\ \nu = g(x/t) &= \frac{\sqrt{8c_2}}{3} \left(1 - \frac{(x/t)^3}{(2c_2)^{3/2}} \right) - U \end{aligned} \quad (6.40)$$

A representação do problema dado pela equação (6.28) cuja solução é dada pelas equações (6.39) e (6.40) no plano (X, t) é mostrada na figura 6.5. Nota-se o leque de rarefação na região ocupada pela barra 2.

As figuras 6.6 e 6.7 apresentam a deformação ε , e a velocidade ν em função da variável de similaridade $\xi = X/t$. Analogamente ao problema heterogêneo linear apresentado no capítulo 4 e ao problema heterogêneo não linear apresentado no caso I neste capítulo, a deformação salta no ponto de colisão, enquanto a velocidade não salta. Nas figuras 6.6 e 6.7 observa-se a conexão por rarefação, na barra 2, de ε_{**} até ε_R e de ν_* até ν_R , ao contrário do caso I, onde todas as conexões foram através de choques.

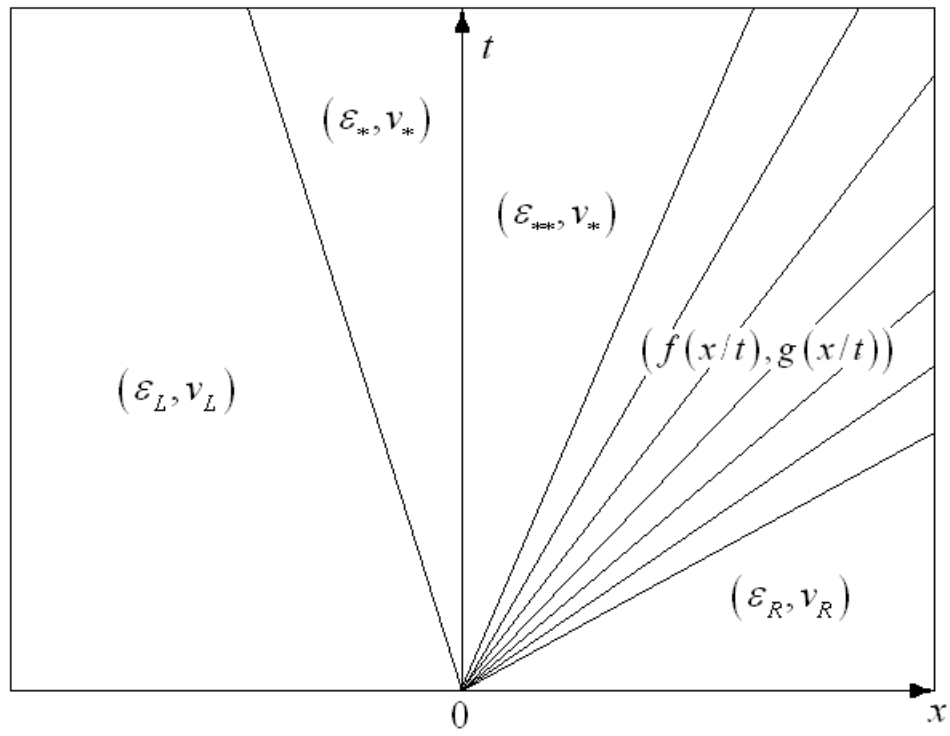


Figura 6.5. Solução do problema heterogêneo elástico linear / não linear, caso II, representada no plano (X, t) .

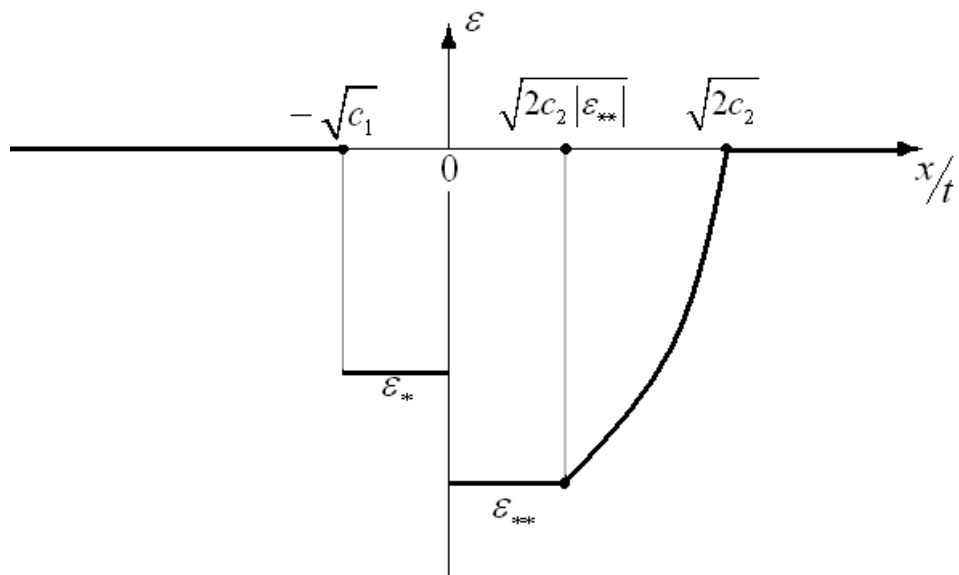


Figura 6.6. Deformação ε versus X/t , para problema heterogêneo elástico linear / não linear, representando o caso II.

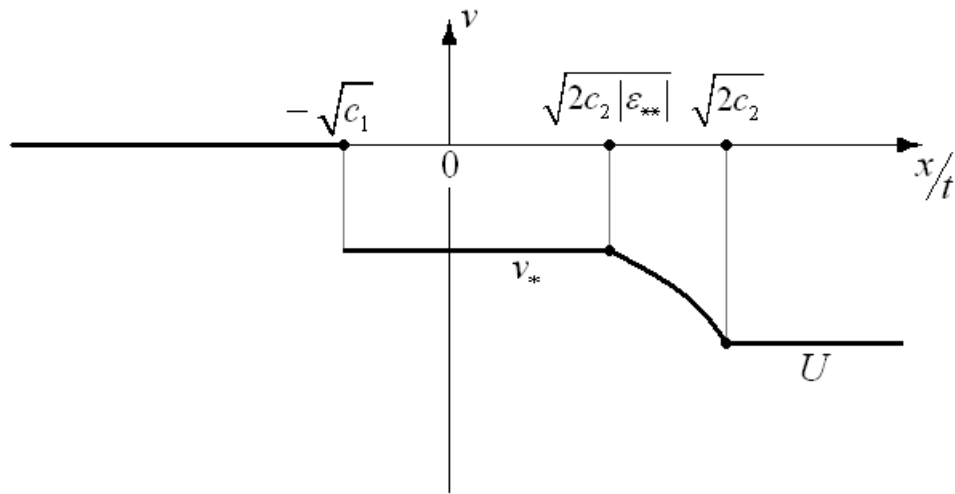


Figura 6.7. Velocidade v versus x/t , para problema heterogêneo elástico linear / não linear, representando o caso II.

A tabela 2 mostra alguns valores obtidos para a deformação no estado intermediário na barra 1, ϵ_* , a deformação no estado intermediário na barra 2, ϵ_{**} , e a velocidade intermediária v_* , apresentados nas três colunas à direita, calculados a partir de valores dados para U , c_1 e c_2 , mostrados nas três colunas à esquerda, considerando o comportamento da componente normal do tensor de Piola-Kirchhoff dada pela equação (6.27), que caracteriza o caso II.

Tabela 2. Valores obtidos para ε_* , ε_{**} , e ν_* a partir de alguns valores dados para a velocidade U , e as constantes c_1 e c_2 , para o caso II.

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\varepsilon_{**} =$	$\varepsilon_* =$	$\nu_* =$
0.200	0.50	0.50	-0.0858	-0.0074	-0.0052
0.200	0.50	1.00	-0.0481	-0.0046	-0.0033
0.200	0.50	1.50	-0.0340	-0.0035	-0.0024
0.200	0.50	2.00	-0.0264	-0.0028	-0.0020
0.200	0.50	2.50	-0.0217	-0.0024	-0.0017
0.200	0.50	3.00	-0.0184	-0.0020	-0.0014
0.200	0.50	3.50	-0.0161	-0.0018	-0.0013
0.200	0.50	4.00	-0.0142	-0.0016	-0.0011
0.200	1.00	0.50	-0.1041	-0.0054	-0.0054
0.200	1.00	1.00	-0.0600	-0.0036	-0.0036
0.200	1.00	1.50	-0.0430	-0.0028	-0.0028
0.200	1.00	2.00	-0.0338	-0.0023	-0.0023
0.200	1.00	2.50	-0.0280	-0.0020	-0.0020
0.200	1.00	3.00	-0.0239	-0.0017	-0.0017
0.200	1.00	3.50	-0.0209	-0.0015	-0.0015
0.200	1.00	4.00	-0.0186	-0.0014	-0.0014
0.200	1.50	0.50	-0.1149	-0.0044	-0.0054
0.200	1.50	1.00	-0.0674	-0.0030	-0.0037
0.200	1.50	1.50	-0.0488	-0.0024	-0.0029
0.200	1.50	2.00	-0.0386	-0.0020	-0.0024
0.200	1.50	2.50	-0.0321	-0.0017	-0.0021
0.200	1.50	3.00	-0.0275	-0.0015	-0.0019
0.200	1.50	3.50	-0.0242	-0.0014	-0.0017
0.200	1.50	4.00	-0.0216	-0.0012	-0.0015
0.200	2.00	0.50	-0.1225	-0.0038	-0.0053
0.200	2.00	1.00	-0.0727	-0.0026	-0.0037
0.200	2.00	1.50	-0.0530	-0.0021	-0.0030
0.200	2.00	2.00	-0.0421	-0.0018	-0.0025
0.200	2.00	2.50	-0.0352	-0.0015	-0.0022
0.200	2.00	3.00	-0.0303	-0.0014	-0.0019
0.200	2.00	3.50	-0.0266	-0.0012	-0.0018
0.200	2.00	4.00	-0.0238	-0.0011	-0.0016
0.200	2.50	0.50	-0.1283	-0.0033	-0.0052
0.200	2.50	1.00	-0.0768	-0.0024	-0.0037
0.200	2.50	1.50	-0.0563	-0.0019	-0.0030
0.200	2.50	2.00	-0.0449	-0.0016	-0.0026
0.200	2.50	2.50	-0.0376	-0.0014	-0.0022
0.200	2.50	3.00	-0.0325	-0.0013	-0.0020
0.200	2.50	3.50	-0.0286	-0.0011	-0.0018
0.200	2.50	4.00	-0.0256	-0.0011	-0.0017
0.200	3.00	0.50	-0.1329	-0.0029	-0.0051
0.200	3.00	1.00	-0.0802	-0.0021	-0.0037

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
0.200	3.00	1.50	-0.0590	-0.0017	-0.0030
0.200	3.00	2.00	-0.0473	-0.0015	-0.0026
0.200	3.00	2.50	-0.0397	-0.0013	-0.0023
0.200	3.00	3.00	-0.0343	-0.0012	-0.0020
0.200	3.00	3.50	-0.0303	-0.0011	-0.0019
0.200	3.00	4.00	-0.0272	-0.0010	-0.0017
0.200	3.50	0.50	-0.1367	-0.0027	-0.0050
0.200	3.50	1.00	-0.0830	-0.0020	-0.0037
0.200	3.50	1.50	-0.0614	-0.0016	-0.0030
0.200	3.50	2.00	-0.0493	-0.0014	-0.0026
0.200	3.50	2.50	-0.0414	-0.0012	-0.0023
0.200	3.50	3.00	-0.0359	-0.0011	-0.0021
0.200	3.50	3.50	-0.0317	-0.0010	-0.0019
0.200	3.50	4.00	-0.0285	-0.0009	-0.0017
0.200	4.00	0.50	-0.1399	-0.0024	-0.0049
0.200	4.00	1.00	-0.0854	-0.0018	-0.0036
0.200	4.00	1.50	-0.0634	-0.0015	-0.0030
0.200	4.00	2.00	-0.0510	-0.0013	-0.0026
0.200	4.00	2.50	-0.0429	-0.0012	-0.0023
0.200	4.00	3.00	-0.0372	-0.0010	-0.0021
0.200	4.00	3.50	-0.0330	-0.0010	-0.0019
0.200	4.00	4.00	-0.0296	-0.0009	-0.0018
0.400	0.50	0.50	-0.1784	-0.0318	-0.0225
0.400	0.50	1.00	-0.0983	-0.0193	-0.0137
0.400	0.50	1.50	-0.0690	-0.0143	-0.0101
0.400	0.50	2.00	-0.0535	-0.0114	-0.0081
0.400	0.50	2.50	-0.0438	-0.0096	-0.0068
0.400	0.50	3.00	-0.0372	-0.0083	-0.0059
0.400	0.50	3.50	-0.0324	-0.0073	-0.0052
0.400	0.50	4.00	-0.0287	-0.0066	-0.0046
0.400	1.00	0.50	-0.2181	-0.0238	-0.0238
0.400	1.00	1.00	-0.1232	-0.0152	-0.0152
0.400	1.00	1.50	-0.0877	-0.0115	-0.0115
0.400	1.00	2.00	-0.0686	-0.0094	-0.0094
0.400	1.00	2.50	-0.0566	-0.0080	-0.0080
0.400	1.00	3.00	-0.0483	-0.0070	-0.0070
0.400	1.00	3.50	-0.0422	-0.0062	-0.0062
0.400	1.00	4.00	-0.0376	-0.0056	-0.0056
0.400	1.50	0.50	-0.2417	-0.0195	-0.0239
0.400	1.50	1.00	-0.1387	-0.0128	-0.0157
0.400	1.50	1.50	-0.0996	-0.0099	-0.0122
0.400	1.50	2.00	-0.0785	-0.0082	-0.0101
0.400	1.50	2.50	-0.0651	-0.0071	-0.0086
0.400	1.50	3.00	-0.0557	-0.0062	-0.0076
0.400	1.50	3.50	-0.0488	-0.0056	-0.0068
0.400	1.50	4.00	-0.0435	-0.0051	-0.0062
0.400	2.00	0.50	-0.2584	-0.0167	-0.0236

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
0.400	2.00	1.00	-0.1499	-0.0112	-0.0159
0.400	2.00	1.50	-0.1084	-0.0088	-0.0125
0.400	2.00	2.00	-0.0858	-0.0074	-0.0104
0.400	2.00	2.50	-0.0714	-0.0064	-0.0090
0.400	2.00	3.00	-0.0613	-0.0056	-0.0080
0.400	2.00	3.50	-0.0539	-0.0051	-0.0072
0.400	2.00	4.00	-0.0481	-0.0046	-0.0065
0.400	2.50	0.50	-0.2711	-0.0147	-0.0232
0.400	2.50	1.00	-0.1587	-0.0101	-0.0159
0.400	2.50	1.50	-0.1153	-0.0080	-0.0126
0.400	2.50	2.00	-0.0916	-0.0067	-0.0106
0.400	2.50	2.50	-0.0764	-0.0058	-0.0092
0.400	2.50	3.00	-0.0658	-0.0052	-0.0082
0.400	2.50	3.50	-0.0579	-0.0047	-0.0074
0.400	2.50	4.00	-0.0518	-0.0043	-0.0068
0.400	3.00	0.50	-0.2813	-0.0132	-0.0228
0.400	3.00	1.00	-0.1658	-0.0092	-0.0159
0.400	3.00	1.50	-0.1210	-0.0073	-0.0127
0.400	3.00	2.00	-0.0964	-0.0062	-0.0107
0.400	3.00	2.50	-0.0806	-0.0054	-0.0094
0.400	3.00	3.00	-0.0696	-0.0048	-0.0084
0.400	3.00	3.50	-0.0613	-0.0044	-0.0076
0.400	3.00	4.00	-0.0549	-0.0040	-0.0070
0.400	3.50	0.50	-0.2897	-0.0120	-0.0224
0.400	3.50	1.00	-0.1718	-0.0084	-0.0158
0.400	3.50	1.50	-0.1258	-0.0068	-0.0127
0.400	3.50	2.00	-0.1005	-0.0058	-0.0108
0.400	3.50	2.50	-0.0842	-0.0051	-0.0095
0.400	3.50	3.00	-0.0728	-0.0045	-0.0085
0.400	3.50	3.50	-0.0643	-0.0041	-0.0077
0.400	3.50	4.00	-0.0576	-0.0038	-0.0071
0.400	4.00	0.50	-0.2969	-0.0110	-0.0220
0.400	4.00	1.00	-0.1769	-0.0078	-0.0156
0.400	4.00	1.50	-0.1300	-0.0063	-0.0127
0.400	4.00	2.00	-0.1041	-0.0054	-0.0108
0.400	4.00	2.50	-0.0874	-0.0048	-0.0095
0.400	4.00	3.00	-0.0756	-0.0043	-0.0086
0.400	4.00	3.50	-0.0668	-0.0039	-0.0078
0.400	4.00	4.00	-0.0600	-0.0036	-0.0072
0.600	0.50	0.50	-0.2800	-0.0784	-0.0555
0.600	0.50	1.00	-0.1510	-0.0456	-0.0322
0.600	0.50	1.50	-0.1052	-0.0332	-0.0235
0.600	0.50	2.00	-0.0812	-0.0264	-0.0187
0.600	0.50	2.50	-0.0664	-0.0220	-0.0156
0.600	0.50	3.00	-0.0563	-0.0190	-0.0134
0.600	0.50	3.50	-0.0489	-0.0167	-0.0118
0.600	0.50	4.00	-0.0433	-0.0150	-0.0106

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$\nu_* =$
0.600	1.00	0.50	-0.3459	-0.0598	-0.0598
0.600	1.00	1.00	-0.1902	-0.0362	-0.0362
0.600	1.00	1.50	-0.1342	-0.0270	-0.0270
0.600	1.00	2.00	-0.1046	-0.0219	-0.0219
0.600	1.00	2.50	-0.0861	-0.0185	-0.0185
0.600	1.00	3.00	-0.0733	-0.0161	-0.0161
0.600	1.00	3.50	-0.0640	-0.0143	-0.0143
0.600	1.00	4.00	-0.0568	-0.0129	-0.0129
0.600	1.50	0.50	-0.3858	-0.0496	-0.0608
0.600	1.50	1.00	-0.2148	-0.0308	-0.0377
0.600	1.50	1.50	-0.1528	-0.0234	-0.0286
0.600	1.50	2.00	-0.1198	-0.0191	-0.0234
0.600	1.50	2.50	-0.0990	-0.0163	-0.0200
0.600	1.50	3.00	-0.0846	-0.0143	-0.0176
0.600	1.50	3.50	-0.0741	-0.0128	-0.0157
0.600	1.50	4.00	-0.0659	-0.0116	-0.0142
0.600	2.00	0.50	-0.4142	-0.0429	-0.0607
0.600	2.00	1.00	-0.2327	-0.0271	-0.0383
0.600	2.00	1.50	-0.1666	-0.0208	-0.0294
0.600	2.00	2.00	-0.1311	-0.0172	-0.0243
0.600	2.00	2.50	-0.1087	-0.0148	-0.0209
0.600	2.00	3.00	-0.0932	-0.0130	-0.0184
0.600	2.00	3.50	-0.0818	-0.0117	-0.0165
0.600	2.00	4.00	-0.0729	-0.0106	-0.0150
0.600	2.50	0.50	-0.4361	-0.0380	-0.0601
0.600	2.50	1.00	-0.2467	-0.0243	-0.0385
0.600	2.50	1.50	-0.1774	-0.0189	-0.0299
0.600	2.50	2.00	-0.1402	-0.0157	-0.0249
0.600	2.50	2.50	-0.1166	-0.0136	-0.0215
0.600	2.50	3.00	-0.1001	-0.0120	-0.0190
0.600	2.50	3.50	-0.0880	-0.0108	-0.0171
0.600	2.50	4.00	-0.0786	-0.0099	-0.0156
0.600	3.00	0.50	-0.4537	-0.0343	-0.0594
0.600	3.00	1.00	-0.2581	-0.0222	-0.0385
0.600	3.00	1.50	-0.1864	-0.0174	-0.0301
0.600	3.00	2.00	-0.1477	-0.0145	-0.0252
0.600	3.00	2.50	-0.1231	-0.0126	-0.0219
0.600	3.00	3.00	-0.1059	-0.0112	-0.0194
0.600	3.00	3.50	-0.0932	-0.0101	-0.0176
0.600	3.00	4.00	-0.0834	-0.0093	-0.0161
0.600	3.50	0.50	-0.4684	-0.0313	-0.0586
0.600	3.50	1.00	-0.2678	-0.0205	-0.0383
0.600	3.50	1.50	-0.1940	-0.0161	-0.0302
0.600	3.50	2.00	-0.1541	-0.0136	-0.0254
0.600	3.50	2.50	-0.1287	-0.0118	-0.0221
0.600	3.50	3.00	-0.1109	-0.0105	-0.0197
0.600	3.50	3.50	-0.0977	-0.0096	-0.0179

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
0.600	3.50	4.00	-0.0875	-0.0088	-0.0164
0.600	4.00	0.50	-0.4809	-0.0289	-0.0578
0.600	4.00	1.00	-0.2760	-0.0191	-0.0381
0.600	4.00	1.50	-0.2006	-0.0151	-0.0302
0.600	4.00	2.00	-0.1596	-0.0127	-0.0255
0.600	4.00	2.50	-0.1335	-0.0111	-0.0223
0.600	4.00	3.00	-0.1153	-0.0100	-0.0199
0.600	4.00	3.50	-0.1017	-0.0091	-0.0181
0.600	4.00	4.00	-0.0912	-0.0083	-0.0166
0.800	0.50	0.50	-0.3942	-0.1554	-0.1099
0.800	0.50	1.00	-0.2065	-0.0852	-0.0603
0.800	0.50	1.50	-0.1426	-0.0610	-0.0432
0.800	0.50	2.00	-0.1097	-0.0482	-0.0341
0.800	0.50	2.50	-0.0895	-0.0400	-0.0283
0.800	0.50	3.00	-0.0757	-0.0344	-0.0243
0.800	0.50	3.50	-0.0657	-0.0302	-0.0214
0.800	0.50	4.00	-0.0581	-0.0270	-0.0191
0.800	1.00	0.50	-0.4951	-0.1225	-0.1225
0.800	1.00	1.00	-0.2618	-0.0686	-0.0686
0.800	1.00	1.50	-0.1828	-0.0501	-0.0501
0.800	1.00	2.00	-0.1417	-0.0402	-0.0402
0.800	1.00	2.50	-0.1163	-0.0338	-0.0338
0.800	1.00	3.00	-0.0989	-0.0293	-0.0293
0.800	1.00	3.50	-0.0861	-0.0260	-0.0260
0.800	1.00	4.00	-0.0764	-0.0234	-0.0234
0.800	1.50	0.50	-0.5587	-0.1041	-0.1274
0.800	1.50	1.00	-0.2970	-0.0588	-0.0720
0.800	1.50	1.50	-0.2088	-0.0436	-0.0534
0.800	1.50	2.00	-0.1627	-0.0353	-0.0432
0.800	1.50	2.50	-0.1340	-0.0299	-0.0367
0.800	1.50	3.00	-0.1143	-0.0261	-0.0320
0.800	1.50	3.50	-0.0999	-0.0233	-0.0285
0.800	1.50	4.00	-0.0888	-0.0210	-0.0258
0.800	2.00	0.50	-0.6055	-0.0917	-0.1296
0.800	2.00	1.00	-0.3227	-0.0521	-0.0736
0.800	2.00	1.50	-0.2280	-0.0390	-0.0551
0.800	2.00	2.00	-0.1784	-0.0318	-0.0450
0.800	2.00	2.50	-0.1474	-0.0272	-0.0384
0.800	2.00	3.00	-0.1261	-0.0238	-0.0337
0.800	2.00	3.50	-0.1104	-0.0213	-0.0302
0.800	2.00	4.00	-0.0983	-0.0193	-0.0273
0.800	2.50	0.50	-0.6425	-0.0826	-0.1306
0.800	2.50	1.00	-0.3429	-0.0470	-0.0744
0.800	2.50	1.50	-0.2433	-0.0355	-0.0561
0.800	2.50	2.00	-0.1910	-0.0292	-0.0461
0.800	2.50	2.50	-0.1582	-0.0250	-0.0396
0.800	2.50	3.00	-0.1355	-0.0220	-0.0349

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$\nu_* =$
0.800	2.50	3.50	-0.1189	-0.0198	-0.0313
0.800	2.50	4.00	-0.1061	-0.0180	-0.0285
0.800	3.00	0.50	-0.6732	-0.0755	-0.1308
0.800	3.00	1.00	-0.3595	-0.0431	-0.0746
0.800	3.00	1.50	-0.2559	-0.0327	-0.0567
0.800	3.00	2.00	-0.2014	-0.0270	-0.0468
0.800	3.00	2.50	-0.1672	-0.0233	-0.0403
0.800	3.00	3.00	-0.1435	-0.0206	-0.0357
0.800	3.00	3.50	-0.1260	-0.0185	-0.0321
0.800	3.00	4.00	-0.1126	-0.0169	-0.0293
0.800	3.50	0.50	-0.6995	-0.0699	-0.1308
0.800	3.50	1.00	-0.3735	-0.0399	-0.0746
0.800	3.50	1.50	-0.2666	-0.0305	-0.0570
0.800	3.50	2.00	-0.2103	-0.0253	-0.0473
0.800	3.50	2.50	-0.1749	-0.0218	-0.0409
0.800	3.50	3.00	-0.1503	-0.0194	-0.0362
0.800	3.50	3.50	-0.1322	-0.0175	-0.0327
0.800	3.50	4.00	-0.1182	-0.0160	-0.0299
0.800	4.00	0.50	-0.7226	-0.0653	-0.1305
0.800	4.00	1.00	-0.3856	-0.0372	-0.0743
0.800	4.00	1.50	-0.2759	-0.0285	-0.0571
0.800	4.00	2.00	-0.2181	-0.0238	-0.0476
0.800	4.00	2.50	-0.1816	-0.0206	-0.0412
0.800	4.00	3.00	-0.1564	-0.0183	-0.0367
0.800	4.00	3.50	-0.1377	-0.0166	-0.0332
0.800	4.00	4.00	-0.1232	-0.0152	-0.0304
1.000	0.50	0.50	-0.5280	-0.2787	-0.1971
1.000	0.50	1.00	-0.2653	-0.1408	-0.0996
1.000	0.50	1.50	-0.1815	-0.0989	-0.0699
1.000	0.50	2.00	-0.1390	-0.0773	-0.0547
1.000	0.50	2.50	-0.1131	-0.0639	-0.0452
1.000	0.50	3.00	-0.0955	-0.0547	-0.0387
1.000	0.50	3.50	-0.0828	-0.0480	-0.0339
1.000	0.50	4.00	-0.0731	-0.0428	-0.0302
1.000	1.00	0.50	-0.6859	-0.2352	-0.2352
1.000	1.00	1.00	-0.3393	-0.1151	-0.1151
1.000	1.00	1.50	-0.2339	-0.0821	-0.0821
1.000	1.00	2.00	-0.1803	-0.0650	-0.0650
1.000	1.00	2.50	-0.1474	-0.0543	-0.0543
1.000	1.00	3.00	-0.1251	-0.0469	-0.0469
1.000	1.00	3.50	-0.1088	-0.0414	-0.0414
1.000	1.00	4.00	-0.0964	-0.0372	-0.0372
1.000	1.50	0.50	-0.8017	-0.2142	-0.2624
1.000	1.50	1.00	-0.3870	-0.0998	-0.1223
1.000	1.50	1.50	-0.2680	-0.0718	-0.0880
1.000	1.50	2.00	-0.2075	-0.0574	-0.0703
1.000	1.50	2.50	-0.1703	-0.0483	-0.0592

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
1.000	1.50	3.00	-0.1449	-0.0420	-0.0514
1.000	1.50	3.50	-0.1263	-0.0372	-0.0456
1.000	1.50	4.00	-0.1122	-0.0336	-0.0411
1.000	2.00	0.50	-0.9118	-0.2078	-0.2939
1.000	2.00	1.00	-0.4223	-0.0892	-0.1261
1.000	2.00	1.50	-0.2934	-0.0646	-0.0913
1.000	2.00	2.00	-0.2279	-0.0519	-0.0735
1.000	2.00	2.50	-0.1876	-0.0440	-0.0622
1.000	2.00	3.00	-0.1599	-0.0384	-0.0543
1.000	2.00	3.50	-0.1398	-0.0342	-0.0483
1.000	2.00	4.00	-0.1243	-0.0309	-0.0437
1.000	2.50	1.00	-0.4504	-0.0811	-0.1283
1.000	2.50	1.50	-0.3137	-0.0590	-0.0933
1.000	2.50	2.00	-0.2443	-0.0478	-0.0755
1.000	2.50	2.50	-0.2015	-0.0406	-0.0642
1.000	2.50	3.00	-0.1721	-0.0356	-0.0562
1.000	2.50	3.50	-0.1507	-0.0318	-0.0502
1.000	2.50	4.00	-0.1342	-0.0288	-0.0456
1.000	3.00	1.00	-0.4735	-0.0747	-0.1295
1.000	3.00	1.50	-0.3305	-0.0546	-0.0946
1.000	3.00	2.00	-0.2580	-0.0444	-0.0768
1.000	3.00	2.50	-0.2132	-0.0379	-0.0656
1.000	3.00	3.00	-0.1824	-0.0333	-0.0576
1.000	3.00	3.50	-0.1599	-0.0298	-0.0516
1.000	3.00	4.00	-0.1426	-0.0271	-0.0469
1.000	3.50	1.00	-0.4933	-0.0695	-0.1301
1.000	3.50	1.50	-0.3448	-0.0510	-0.0953
1.000	3.50	2.00	-0.2697	-0.0416	-0.0777
1.000	3.50	2.50	-0.2232	-0.0356	-0.0666
1.000	3.50	3.00	-0.1912	-0.0313	-0.0586
1.000	3.50	3.50	-0.1678	-0.0282	-0.0527
1.000	3.50	4.00	-0.1498	-0.0256	-0.0480
1.000	4.00	1.00	-0.5104	-0.0651	-0.1303
1.000	4.00	1.50	-0.3573	-0.0479	-0.0958
1.000	4.00	2.00	-0.2799	-0.0392	-0.0783
1.000	4.00	2.50	-0.2320	-0.0336	-0.0673
1.000	4.00	3.00	-0.1990	-0.0297	-0.0594
1.000	4.00	3.50	-0.1748	-0.0267	-0.0535
1.000	4.00	4.00	-0.1562	-0.0244	-0.0488
1.200	0.50	0.50	-0.6994	-0.4892	-0.3459
1.200	0.50	1.00	-0.3283	-0.2156	-0.1524
1.200	0.50	1.50	-0.2221	-0.1480	-0.1046
1.200	0.50	2.00	-0.1692	-0.1145	-0.0810
1.200	0.50	2.50	-0.1372	-0.0942	-0.0666
1.200	0.50	3.00	-0.1157	-0.0803	-0.0568
1.200	0.50	3.50	-0.1001	-0.0702	-0.0496
1.200	0.50	4.00	-0.0884	-0.0625	-0.0442

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
1.200	1.00	1.00	-0.4245	-0.1802	-0.1802
1.200	1.00	1.50	-0.2878	-0.1243	-0.1243
1.200	1.00	2.00	-0.2204	-0.0972	-0.0972
1.200	1.00	2.50	-0.1795	-0.0806	-0.0806
1.200	1.00	3.00	-0.1519	-0.0693	-0.0693
1.200	1.00	3.50	-0.1319	-0.0609	-0.0609
1.200	1.00	4.00	-0.1168	-0.0545	-0.0545
1.200	1.50	1.00	-0.4881	-0.1588	-0.1945
1.200	1.50	1.50	-0.3312	-0.1097	-0.1343
1.200	1.50	2.00	-0.2544	-0.0863	-0.1057
1.200	1.50	2.50	-0.2078	-0.0720	-0.0882
1.200	1.50	3.00	-0.1763	-0.0622	-0.0762
1.200	1.50	3.50	-0.1535	-0.0550	-0.0673
1.200	1.50	4.00	-0.1361	-0.0494	-0.0605
1.200	2.00	1.00	-0.5362	-0.1438	-0.2033
1.200	2.00	1.50	-0.3638	-0.0992	-0.1404
1.200	2.00	2.00	-0.2800	-0.0784	-0.1109
1.200	2.00	2.50	-0.2293	-0.0657	-0.0930
1.200	2.00	3.00	-0.1950	-0.0570	-0.0806
1.200	2.00	3.50	-0.1700	-0.0506	-0.0715
1.200	2.00	4.00	-0.1510	-0.0456	-0.0645
1.200	2.50	1.00	-0.5751	-0.1323	-0.2092
1.200	2.50	1.50	-0.3899	-0.0912	-0.1442
1.200	2.50	2.00	-0.3007	-0.0723	-0.1144
1.200	2.50	2.50	-0.2467	-0.0609	-0.0962
1.200	2.50	3.00	-0.2101	-0.0530	-0.0837
1.200	2.50	3.50	-0.1834	-0.0471	-0.0745
1.200	2.50	4.00	-0.1631	-0.0426	-0.0673
1.200	3.00	1.00	-0.6080	-0.1232	-0.2134
1.200	3.00	1.50	-0.4117	-0.0848	-0.1468
1.200	3.00	2.00	-0.3180	-0.0674	-0.1168
1.200	3.00	2.50	-0.2613	-0.0569	-0.0985
1.200	3.00	3.00	-0.2228	-0.0496	-0.0860
1.200	3.00	3.50	-0.1948	-0.0443	-0.0767
1.200	3.00	4.00	-0.1734	-0.0401	-0.0694
1.200	3.50	1.00	-0.6364	-0.1157	-0.2165
1.200	3.50	1.50	-0.4304	-0.0794	-0.1485
1.200	3.50	2.00	-0.3329	-0.0633	-0.1184
1.200	3.50	2.50	-0.2739	-0.0536	-0.1002
1.200	3.50	3.00	-0.2338	-0.0469	-0.0877
1.200	3.50	3.50	-0.2046	-0.0419	-0.0783
1.200	3.50	4.00	-0.1823	-0.0380	-0.0711
1.200	4.00	1.00	-0.6616	-0.1094	-0.2189
1.200	4.00	1.50	-0.4468	-0.0748	-0.1497
1.200	4.00	2.00	-0.3459	-0.0598	-0.1196
1.200	4.00	2.50	-0.2849	-0.0507	-0.1014
1.200	4.00	3.00	-0.2435	-0.0445	-0.0889

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
1.200	4.00	3.50	-0.2133	-0.0398	-0.0796
1.200	4.00	4.00	-0.1902	-0.0362	-0.0724
1.400	0.50	1.00	-0.3965	-0.3145	-0.2224
1.400	0.50	1.50	-0.2645	-0.2098	-0.1484
1.400	0.50	2.00	-0.2004	-0.1606	-0.1136
1.400	0.50	2.50	-0.1620	-0.1312	-0.0928
1.400	0.50	3.00	-0.1363	-0.1115	-0.0788
1.400	0.50	3.50	-0.1178	-0.0972	-0.0687
1.400	0.50	4.00	-0.1039	-0.0863	-0.0610
1.400	1.00	1.00	-0.5206	-0.2710	-0.2710
1.400	1.00	1.50	-0.3453	-0.1788	-0.1788
1.400	1.00	2.00	-0.2623	-0.1376	-0.1376
1.400	1.00	2.50	-0.2127	-0.1132	-0.1132
1.400	1.00	3.00	-0.1795	-0.0967	-0.0967
1.400	1.00	3.50	-0.1556	-0.0848	-0.0848
1.400	1.00	4.00	-0.1375	-0.0757	-0.0757
1.400	1.50	1.00	-0.6064	-0.2451	-0.3002
1.400	1.50	1.50	-0.3993	-0.1595	-0.1953
1.400	1.50	2.00	-0.3037	-0.1230	-0.1506
1.400	1.50	2.50	-0.2469	-0.1016	-0.1244
1.400	1.50	3.00	-0.2088	-0.0872	-0.1068
1.400	1.50	3.50	-0.1814	-0.0768	-0.0940
1.400	1.50	4.00	-0.1606	-0.0687	-0.0842
1.400	2.00	1.00	-0.6746	-0.2275	-0.3218
1.400	2.00	1.50	-0.4405	-0.1455	-0.2058
1.400	2.00	2.00	-0.3353	-0.1124	-0.1590
1.400	2.00	2.50	-0.2730	-0.0931	-0.1317
1.400	2.00	3.00	-0.2313	-0.0802	-0.1134
1.400	2.00	3.50	-0.2012	-0.0708	-0.1001
1.400	2.00	4.00	-0.1783	-0.0636	-0.0899
1.400	2.50	1.00	-0.7329	-0.2149	-0.3397
1.400	2.50	1.50	-0.4738	-0.1347	-0.2130
1.400	2.50	2.00	-0.3608	-0.1041	-0.1646
1.400	2.50	2.50	-0.2941	-0.0865	-0.1368
1.400	2.50	3.00	-0.2495	-0.0747	-0.1181
1.400	2.50	3.50	-0.2173	-0.0661	-0.1045
1.400	2.50	4.00	-0.1929	-0.0595	-0.0941
1.400	3.00	1.00	-0.7856	-0.2057	-0.3563
1.400	3.00	1.50	-0.5019	-0.1260	-0.2182
1.400	3.00	2.00	-0.3822	-0.0974	-0.1687
1.400	3.00	2.50	-0.3120	-0.0811	-0.1405
1.400	3.00	3.00	-0.2649	-0.0702	-0.1216
1.400	3.00	3.50	-0.2310	-0.0622	-0.1078
1.400	3.00	4.00	-0.2052	-0.0561	-0.0972
1.400	3.50	1.00	-0.8355	-0.1995	-0.3732
1.400	3.50	1.50	-0.5262	-0.1187	-0.2220
1.400	3.50	2.00	-0.4008	-0.0918	-0.1717

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
1.400	3.50	2.50	-0.3273	-0.0765	-0.1432
1.400	3.50	3.00	-0.2783	-0.0664	-0.1242
1.400	3.50	3.50	-0.2428	-0.0590	-0.1103
1.400	3.50	4.00	-0.2159	-0.0533	-0.0997
1.400	4.00	1.00	-0.8860	-0.1962	-0.3925
1.400	4.00	1.50	-0.5477	-0.1125	-0.2250
1.400	4.00	2.00	-0.4170	-0.0870	-0.1739
1.400	4.00	2.50	-0.3409	-0.0726	-0.1453
1.400	4.00	3.00	-0.2900	-0.0631	-0.1262
1.400	4.00	3.50	-0.2533	-0.0561	-0.1123
1.400	4.00	4.00	-0.2254	-0.0508	-0.1016
1.600	0.50	1.00	-0.4716	-0.4448	-0.3145
1.600	0.50	1.50	-0.3090	-0.2865	-0.2026
1.600	0.50	2.00	-0.2326	-0.2165	-0.1531
1.600	0.50	2.50	-0.1874	-0.1757	-0.1242
1.600	0.50	3.00	-0.1574	-0.1486	-0.1051
1.600	0.50	3.50	-0.1358	-0.1291	-0.0913
1.600	0.50	4.00	-0.1196	-0.1144	-0.0809
1.600	1.00	1.00	-0.6339	-0.4019	-0.4019
1.600	1.00	1.50	-0.4070	-0.2485	-0.2485
1.600	1.00	2.00	-0.3062	-0.1875	-0.1875
1.600	1.00	2.50	-0.2472	-0.1527	-0.1527
1.600	1.00	3.00	-0.2080	-0.1297	-0.1297
1.600	1.00	3.50	-0.1799	-0.1133	-0.1133
1.600	1.00	4.00	-0.1588	-0.1008	-0.1008
1.600	1.50	1.00	-0.7587	-0.3837	-0.4700
1.600	1.50	1.50	-0.4740	-0.2246	-0.2751
1.600	1.50	2.00	-0.3560	-0.1690	-0.2070
1.600	1.50	2.50	-0.2877	-0.1379	-0.1689
1.600	1.50	3.00	-0.2424	-0.1176	-0.1440
1.600	1.50	3.50	-0.2101	-0.1030	-0.1261
1.600	1.50	4.00	-0.1856	-0.0919	-0.1126
1.600	2.00	1.00	-0.8792	-0.3865	-0.5466
1.600	2.00	1.50	-0.5259	-0.2074	-0.2933
1.600	2.00	2.00	-0.3942	-0.1554	-0.2198
1.600	2.00	2.50	-0.3188	-0.1270	-0.1796
1.600	2.00	3.00	-0.2690	-0.1085	-0.1535
1.600	2.00	3.50	-0.2333	-0.0953	-0.1347
1.600	2.00	4.00	-0.2065	-0.0852	-0.1206
1.600	2.50	1.50	-0.5688	-0.1941	-0.3069
1.600	2.50	2.00	-0.4254	-0.1448	-0.2290
1.600	2.50	2.50	-0.3442	-0.1184	-0.1873
1.600	2.50	3.00	-0.2906	-0.1014	-0.1603
1.600	2.50	3.50	-0.2524	-0.0892	-0.1410
1.600	2.50	4.00	-0.2235	-0.0799	-0.1264
1.600	3.00	1.50	-0.6056	-0.1834	-0.3176
1.600	3.00	2.00	-0.4519	-0.1361	-0.2358

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
1.600	3.00	2.50	-0.3656	-0.1114	-0.1929
1.600	3.00	3.00	-0.3090	-0.0955	-0.1654
1.600	3.00	3.50	-0.2685	-0.0841	-0.1457
1.600	3.00	4.00	-0.2380	-0.0755	-0.1308
1.600	3.50	1.50	-0.6381	-0.1745	-0.3264
1.600	3.50	2.00	-0.4748	-0.1288	-0.2410
1.600	3.50	2.50	-0.3842	-0.1054	-0.1973
1.600	3.50	3.00	-0.3249	-0.0905	-0.1693
1.600	3.50	3.50	-0.2826	-0.0799	-0.1494
1.600	3.50	4.00	-0.2507	-0.0718	-0.1343
1.600	4.00	1.50	-0.6672	-0.1670	-0.3339
1.600	4.00	2.00	-0.4951	-0.1225	-0.2451
1.600	4.00	2.50	-0.4007	-0.1003	-0.2007
1.600	4.00	3.00	-0.3390	-0.0862	-0.1724
1.600	4.00	3.50	-0.2950	-0.0762	-0.1523
1.600	4.00	4.00	-0.2618	-0.0686	-0.1371
1.800	0.50	1.00	-0.5563	-0.6190	-0.4377
1.800	0.50	1.50	-0.3561	-0.3805	-0.2690
1.800	0.50	2.00	-0.2661	-0.2832	-0.2003
1.800	0.50	2.50	-0.2136	-0.2281	-0.1613
1.800	0.50	3.00	-0.1789	-0.1920	-0.1357
1.800	0.50	3.50	-0.1541	-0.1663	-0.1176
1.800	0.50	4.00	-0.1356	-0.1470	-0.1040
1.800	1.00	1.00	-0.7826	-0.6125	-0.6125
1.800	1.00	1.50	-0.4743	-0.3374	-0.3374
1.800	1.00	2.00	-0.3525	-0.2485	-0.2485
1.800	1.00	2.50	-0.2829	-0.2001	-0.2001
1.800	1.00	3.00	-0.2373	-0.1689	-0.1689
1.800	1.00	3.50	-0.2048	-0.1468	-0.1468
1.800	1.00	4.00	-0.1805	-0.1303	-0.1303
1.800	1.50	1.50	-0.5576	-0.3109	-0.3808
1.800	1.50	2.00	-0.4118	-0.2262	-0.2770
1.800	1.50	2.50	-0.3304	-0.1820	-0.2229
1.800	1.50	3.00	-0.2773	-0.1538	-0.1884
1.800	1.50	3.50	-0.2397	-0.1340	-0.1641
1.800	1.50	4.00	-0.2114	-0.1192	-0.1459
1.800	2.00	1.50	-0.6244	-0.2924	-0.4136
1.800	2.00	2.00	-0.4580	-0.2097	-0.2966
1.800	2.00	2.50	-0.3672	-0.1685	-0.2383
1.800	2.00	3.00	-0.3083	-0.1426	-0.2016
1.800	2.00	3.50	-0.2666	-0.1244	-0.1760
1.800	2.00	4.00	-0.2354	-0.1108	-0.1568
1.800	2.50	1.50	-0.6818	-0.2789	-0.4409
1.800	2.50	2.00	-0.4961	-0.1969	-0.3113
1.800	2.50	2.50	-0.3973	-0.1578	-0.2496
1.800	2.50	3.00	-0.3337	-0.1337	-0.2113
1.800	2.50	3.50	-0.2888	-0.1168	-0.1847

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$v_* =$
1.800	2.50	4.00	-0.2552	-0.1042	-0.1648
1.800	3.00	1.50	-0.7332	-0.2688	-0.4656
1.800	3.00	2.00	-0.5286	-0.1863	-0.3227
1.800	3.00	2.50	-0.4229	-0.1491	-0.2582
1.800	3.00	3.00	-0.3553	-0.1263	-0.2187
1.800	3.00	3.50	-0.3077	-0.1104	-0.1913
1.800	3.00	4.00	-0.2720	-0.0987	-0.1709
1.800	3.50	1.50	-0.7813	-0.2616	-0.4894
1.800	3.50	2.00	-0.5572	-0.1774	-0.3320
1.800	3.50	2.50	-0.4453	-0.1416	-0.2650
1.800	3.50	3.00	-0.3742	-0.1200	-0.2245
1.800	3.50	3.50	-0.3241	-0.1051	-0.1965
1.800	3.50	4.00	-0.2867	-0.0939	-0.1758
1.800	4.00	1.50	-0.8279	-0.2570	-0.5140
1.800	4.00	2.00	-0.5828	-0.1698	-0.3397
1.800	4.00	2.50	-0.4651	-0.1352	-0.2704
1.800	4.00	3.00	-0.3908	-0.1146	-0.2291
1.800	4.00	3.50	-0.3387	-0.1004	-0.2008
1.800	4.00	4.00	-0.2998	-0.0899	-0.1797
2.000	0.50	1.00	-0.6563	-0.8615	-0.6092
2.000	0.50	1.50	-0.4063	-0.4952	-0.3502
2.000	0.50	2.00	-0.3009	-0.3622	-0.2561
2.000	0.50	2.50	-0.2405	-0.2892	-0.2045
2.000	0.50	3.00	-0.2009	-0.2422	-0.1712
2.000	0.50	3.50	-0.1728	-0.2091	-0.1479
2.000	0.50	4.00	-0.1518	-0.1844	-0.1304
2.000	1.00	1.50	-0.5491	-0.4522	-0.4522
2.000	1.00	2.00	-0.4016	-0.3226	-0.3226
2.000	1.00	2.50	-0.3202	-0.2564	-0.2564
2.000	1.00	3.00	-0.2676	-0.2148	-0.2148
2.000	1.00	3.50	-0.2304	-0.1858	-0.1858
2.000	1.00	4.00	-0.2026	-0.1643	-0.1643
2.000	1.50	1.50	-0.6552	-0.4293	-0.5257
2.000	1.50	2.00	-0.4722	-0.2972	-0.3640
2.000	1.50	2.50	-0.3755	-0.2349	-0.2877
2.000	1.50	3.00	-0.3136	-0.1967	-0.2410
2.000	1.50	3.50	-0.2702	-0.1704	-0.2087
2.000	1.50	4.00	-0.2379	-0.1509	-0.1848
2.000	2.00	1.50	-0.7466	-0.4181	-0.5913
2.000	2.00	2.00	-0.5280	-0.2787	-0.3942
2.000	2.00	2.50	-0.4186	-0.2190	-0.3097
2.000	2.00	3.00	-0.3495	-0.1832	-0.2591
2.000	2.00	3.50	-0.3012	-0.1588	-0.2246
2.000	2.00	4.00	-0.2653	-0.1408	-0.1991
2.000	2.50	1.50	-0.8348	-0.4182	-0.6612
2.000	2.50	2.00	-0.5749	-0.2644	-0.4180
2.000	2.50	2.50	-0.4543	-0.2064	-0.3263

$U =$	$c_1 =$	$c_2 =$	$\mathcal{E}_{**} =$	$\mathcal{E}_* =$	$\nu_* =$
2.000	2.50	3.00	-0.3791	-0.1725	-0.2727
2.000	2.50	3.50	-0.3268	-0.1495	-0.2364
2.000	2.50	4.00	-0.2880	-0.1327	-0.2098
2.000	3.00	1.50	-0.9388	-0.4407	-0.7633
2.000	3.00	2.00	-0.6158	-0.2528	-0.4378
2.000	3.00	2.50	-0.4849	-0.1959	-0.3394
2.000	3.00	3.00	-0.4044	-0.1635	-0.2833
2.000	3.00	3.50	-0.3486	-0.1418	-0.2456
2.000	3.00	4.00	-0.3073	-0.1259	-0.2181
2.000	3.50	2.00	-0.6524	-0.2432	-0.4550
2.000	3.50	2.50	-0.5118	-0.1871	-0.3500
2.000	3.50	3.00	-0.4265	-0.1559	-0.2917
2.000	3.50	3.50	-0.3677	-0.1352	-0.2530
2.000	3.50	4.00	-0.3243	-0.1202	-0.2248
2.000	4.00	2.00	-0.6859	-0.2352	-0.4705
2.000	4.00	2.50	-0.5358	-0.1794	-0.3589
2.000	4.00	3.00	-0.4462	-0.1493	-0.2987
2.000	4.00	3.50	-0.3847	-0.1295	-0.2590
2.000	4.00	4.00	-0.3393	-0.1151	-0.2303

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Este trabalho estudou o fenômeno de propagação de ondas em barras elásticas compostas por dois materiais que podem ser lineares e iguais (barra homogênea) ou diferentes (barra heterogênea linear). Aumentando a complexidade do problema foram consideradas barras compostas por um material elástico linear e um material elástico não linear. Para este último foram supostas duas equações diferentes, denotadas por casos I e II, caracterizando as barras heterogêneas linear / não linear.

A descrição matemática do problema origina um sistema de equações diferenciais não linear hiperbólico. Apresenta-se a solução analítica completa dos Problemas de Riemann, problemas de valor inicial caracterizados por condição inicial dada por uma função degrau, associados a cada um dos casos considerados.

A colisão inelástica de dois corpos elásticos gerou propagações de ondas distintas à esquerda e à direita do ponto de colisão. No caso da barra heterogênea linear não há salto de velocidade e nem de deformação no ponto de colisão. Para a barra heterogênea linear não há salto de velocidade na interface entre os dois corpos (dois materiais), mas há salto de deformação (exceto nos casos em que, por coincidência, ocorrer igualdade entre as deformações ε_* e ε_{**} , correspondentes às barras 1 e 2, respectivamente). As barras heterogêneas formadas de um material linear (à esquerda do ponto de colisão) e um não linear (à direita do ponto), supondo dois comportamentos diferentes, originaram um problema no qual o estado à esquerda (L) é conectado ao estado intermediário 1 (*) por um choque de contato, ao qual não está associada geração de entropia. Por sua vez o estado (*) é conectado ao estado intermediário 2 (**) por um choque estacionário, enquanto o estado intermediário 2 (**) é conectado ao estado à direita por um choque no caso I e por uma rarefação no caso II.

Como sugestão para futuros trabalhos tem-se a simulação de problemas com condições iniciais quaisquer, a partir da combinação dos resultados aqui apresentados com o Método de Glimm, através da aproximação de uma condição inicial arbitrária por uma função constante por partes. Na sequência, seriam resolvidos os problemas de Riemann cuja solução analítica já foi apresentada neste trabalho, para cada dois passos consecutivos.

Outra sugestão seria a simulação de problemas com condições de contorno e com restrições de contato unilateral.

REFERÊNCIAS

- Berezovski, A., Berezovski, M. and Engelbrecht, J., 2006 Numerical simulation of nonlinear elastic wave propagation in piecewise homogeneous media, *Materials Sci. Engng. A*, **418**, 364-369.
- Berezovski, A., and Maugin, G. A., 2001 Simulation of Thermoelastic wave propagation by means of a composite wave-propagation algorithm, *J. Comput. Physics*, **168**, 249-264.
- Billington, E. W. and Tate, A., 1981 *The Physics of Deformation and Flow*, McGraw-Hill.
- Callen, H. B., 1960 *Thermodynamics*, John Wiley.
- Chen, X. Chandra, N. and Rajendran, A. M., 2004 Analytical solution to plate impact problem of layered heterogeneous material systems, *Int. J. Solids Structures*, **41**, 4635-4659.
- Engelbrecht, J., Berezovski, A. and Salupere, A., 2007 Nonlinear waves in solids and dispersion, *Wave Motion*, **44**, 493-500.
- John, F., 1974 Formation of singularities in onedimensional nonlinear wave propagation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **27**, 337-405.
- Keyfitz, B. and Kranzer, H., 1978 Existence and uniqueness of entropy solutions to the Riemann problem for hyperbolic systems of two nonlinear conservation laws, *J. Diff. Eqns.*, **27**, 444-476.
- Lax, P., 1971 Shock waves and entropy. In *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, pp. 603-634, Academic Press.
- Roe, P. L., 1997 Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *J. Comput. Phys*, **135**, 250-258.
- Saldanha da Gama R. M., Martins-Costa M. L., 2008 An alternative procedure for approximating hyperbolic systems of conservation laws. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, **9**, 1310-1322.
- Smoller, J., 1983 *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag.
- Tenenbaum, R. and Zindeluk, M., 1992 An exact solution for the one-dimensional elastic wave equation in layered media, *J. Acoust. Soc. Am.*, **92**, 3364-3370.
- Tenenbaum, R. and Zindeluk, M., 1992 A fast algorithm to solve the inverse scattering problem in layered media with an arbitrary input, *J. Acoust. Soc. Am.*, **92**, 3371-3378.
- Zhuang, S., Ravichandran, G. and Grady, D. E., 2003 An experimental investigation of shock wave propagation in periodically layered composites, *J. Mech. Phys. Solids*, **51**, 245-265.