



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Faculdade de Engenharia


Carlos Daniel Braga Girão Barroso

**Modelagem matemática da transferência de calor numa placa plana
sob o efeito de uma fonte pontual externa de radiação térmica**

Rio de Janeiro
2008

Carlos Daniel Braga Girão Barroso

Modelagem matemática da transferência de calor numa placa plana sob o efeito de uma fonte pontual externa de radiação térmica



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transportes.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama

Rio de Janeiro

2008

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

B277 Barroso, Carlos Daniel Braga Girão.
Modelagem matemática da transferência de calor numa placa plana sob o efeito de uma fonte pontual externa de radiação térmica / Carlos Daniel Braga Girão Barroso. – 2008.
63f.

Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Mecânica. 2. Transferência de calor - Dissertações. 3. Fenômenos de Transportes - Dissertações. Gama, Rogério Martins Saldanha. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Título.

CDU 621:536.2

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Carlos Daniel Braga Girão Barroso

Modelagem matemática da transferência de calor numa placa plana sob o efeito de uma fonte pontual externa de radiação térmica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transportes.

Aprovado em: 28 de Novembro de 2008.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama (Orientador)
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Prof. Dr. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Prof. Dr. Heraldo Costa Mattos
Universidade Federal Fluminense – UFF

Prof^a Dra. Maria Laura Martins Costa
Universidade Federal Fluminense – UFF

Rio de Janeiro

2008

DEDICATÓRIA

Ao meu orientador Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama que não desistiu de mim e me incentivou até o final.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama por toda a ajuda, paciência, dedicação e pela excelente orientação, apontando os melhores caminhos que viabilizaram o desenvolvimento deste trabalho.

A UERJ, e em especial ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, por passar a fornecer aos seu alunos oportunidade de desenvolver trabalhos de pesquisa em mais esta área.

A todos aqueles, que embora não citados nominalmente, contribuíram para a execução deste trabalho.

À FAPERJ pelo apoio financeiro.

RESUMO

BARROSO, Carlos Daniel Braga Girão. *Modelagem matemática da transferência de calor numa placa plana sob o efeito de uma fonte pontual externa de radiação térmica*. 2008. 63f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Este trabalho apresenta uma modelagem matemática para o processo de aquecimento de um corpo exposto a uma fonte pontual de radiação térmica. O resultado original que permite a solução exata de uma equação diferencial parcial não linear a partir de uma seqüência de problemas lineares também é apresentado. Gráficos gerados com resultados obtidos pelo método de diferenças finitas ilustram a solução do problema proposto..

Palavras-chave: Transferência de calor; Radiação; Formulação variacional; Simulação numérica.

ABSTRACT

BARROSO, Carlos Daniel Braga Girão. *Mathematical modeling of the heat transfer phenomenon on a flat body exposed to a punctual source of thermal radiation*. 2008. 63f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

This work presents a mathematical model for the heating process on a body exposed to a punctual source of thermal radiation. An original result, that allows the construction of the exact solution for a non-linear partial differential equation by solving a sequence of linear problems, is also presented. Graphic images generated from the results obtained through the Finite Difference Method illustrate the solution of the proposed problem.

Keywords: Heat transfer; Thermal radiation; Variational formulation; Numeric simulations.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 - Corpo convexo..... | 14 |
| Figura 2 - Corpo não convexo..... | 15 |
| Figura 3 - O corpo em estudo (convexo) | 26 |
| Figura 4 – Esquema ilustrativo da fonte de calor e da placa plana..... | 31 |
| Figura 5 – Esquema para cálculo de s..... | 32 |
| Figura 6 – O esquema em diferenças finitas..... | 50 |
| Figura 7 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição A..... | 53 |
| Figura 8 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição B..... | 54 |
| Figura 9 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição C..... | 55 |
| Figura 10 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição D..... | 56 |
| Figura 11 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição E..... | 57 |
| Figura 12 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição F..... | 58 |
| Figura 13 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição G..... | 59 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Valores de φ_i obtidos para 5 valores diferentes de constantes..... | 49 |
|--|----|

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|--------|---|
| UERJ | Universidade do Estado do Rio de Janeiro |
| UFF | Universidade Federal Fluminense |
| FAPERJ | Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|------------------|--|
| a | raio da esfera negra (fonte externa de radiação) |
| B | radiosidade |
| c | calor específico |
| C | identificação do corpo |
| C_1 | constante 1 |
| C_2 | constante 2 |
| e_b | energia emitida por radiação |
| \mathbf{g} | força de corpo externa |
| h | coeficiente de filme |
| H | energia radiante térmica |
| k | condutividade térmica |
| L | largura da placa |
| \mathbf{m} | vetor normal unitário exterior |
| \mathbf{n} | vetor normal unitário exterior |
| Q | taxa de dissipação de calor |
| \mathbf{q} | vetor fluxo de calor |
| \dot{q} | taxa de fornecimento de calor |
| q_{CONV} | fluxo de calor por condução |
| q_{RAD} | fluxo de calor por radiação |
| \mathbf{T} | tensor de Cauchy |
| T | temperatura |
| T_∞ | temperatura da vizinhança |
| T_s | temperatura da fonte externa de radiação |
| \mathbf{v} | velocidade |
| \mathbf{X} | ponto sobre fronteira |
| \mathbf{Y} | ponto sobre fronteira |
| $\partial\Gamma$ | fronteira de Γ |
| $\partial\Omega$ | fronteira de Ω |
| α | absortância |
| ε | emissividade da superfície |

| | |
|----------|--|
| Γ | conjunto que representa esfera |
| μ | constante positiva |
| ρ | reflectância |
| σ | constante de Stefan-Boltzmann |
| Ω | Conjunto aberto e limitado pertencente ao \mathbb{R}^M ($M=1, 2$ ou 3) |

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| INTRODUÇÃO..... | 13 |
| 1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS..... | 14 |
| 1.1 Transmissão de calor no interior do corpo..... | 15 |
| 1.2 Lei de Fourier..... | 16 |
| 1.3 Condições de contorno usuais e suas limitações..... | 17 |
| 1.4 Transmissão de calor por radiação – corpos cinzentos..... | 20 |
| 1.5 O acoplamento entre a condução e a radiação térmica..... | 23 |
| 1.6 Modelo matemático resultante para um corpo convexo..... | 24 |
| 2 MODELAGEM DA TRANSMISSÃO DE CALOR NUM CORPO RÍGIDO, OPACO, CINZENTO E CONVEXO..... | 26 |
| 3 MODELAGEM DA FONTE EXTERNA DE RADIAÇÃO..... | 30 |
| 4 DESCRIÇÃO DO FENÔMENO NUMA PLACA PLANA DELGADA..... | 37 |
| 5 CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO EXATA..... | 41 |
| 6 SIMULAÇÃO VIA DIFERENÇAS FINITAS..... | 50 |
| 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 60 |
| REFERÊNCIAS..... | 61 |

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como tema o fenômeno de transmissão de calor em regime permanente num corpo rígido, opaco, convexo e em repouso, imerso num meio não opaco (no que diz respeito à radiação térmica).

Quando um corpo com temperatura diferente de zero (absoluto), está imerso num meio não opaco ele emite radiação térmica para sua vizinhança. Há um fluxo de energia do corpo para a vizinhança gerando um processo de transferência de energia no interior deste corpo que é afetado pela existência de outras fontes externas cujas emissões atinjam a superfície do corpo em questão.

Os processos de transmissão de calor em satélites artificiais e em “flares” de plataformas são exemplos de aplicações. De um modo geral, situações onde há existência de altas temperaturas e/ou as atmosferas são rarefeitas, onde a radiação térmica não pode ser desprezada quando comparada à convecção, são as maiores aplicações associadas ao tema.

A grande motivação para este trabalho é a inexistência de um ferramental simples e adequado para o tratamento desta classe de problemas em suas formulações locais. A mais simples das descrições locais para o processo acoplado de transferência de calor condução/radiação consiste de uma equação diferencial parcial elíptica sujeita a condições de contorno (sempre não lineares) representando, por exemplo, o acoplamento condução/radiação com restrições unilaterais de natureza física.

A solução de tal problema demanda um ferramental bastante sofisticado implicando em altos custos e falta de profissionais qualificados. Simulações computacionais sem análise matemática/física prévia podem gerar respostas sem sentido físico ou nem mesmo obter convergência.

Neste trabalho será apresentado um conjunto de procedimentos que permite abordar estes problemas, a partir de um ferramental simples, sem que seja necessária qualquer aproximação que altere o significado físico original do modelo.

1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Qualquer corpo fora do equilíbrio térmico experimenta um processo interno de transmissão de calor. Se este corpo for rígido e opaco esta transmissão de calor se processa por condução pura, em função dos gradientes internos de temperatura.

Este processo interno de transmissão de calor é combinado com outros mecanismos para promover a troca de calor do corpo para a vizinhança e vice-versa.

O processo de transferência de calor ocorrendo dentro do corpo é governado por uma equação diferencial definida no interior do corpo enquanto que a transmissão de calor de/para a vizinhança é descrita através de condições de fronteira (condições de contorno)

Quando um ou mais corpos (com temperaturas diferentes de zero absoluto) encontram-se imersos em meios não opacos sempre há um processo de troca de calor por energia radiante térmica através de suas fronteiras.

Se imaginarmos um corpo convexo como o da figura 1, imerso no vácuo e sem a presença de outros corpos, teremos que o processo de transferência de energia associado será um acoplamento entre a condução de calor (no interior do corpo) com a radiação térmica (da fronteira do corpo para o exterior). Este acoplamento, que será discutido mais adiante, é obtido através da continuidade dos fluxos normais de calor na fronteira.

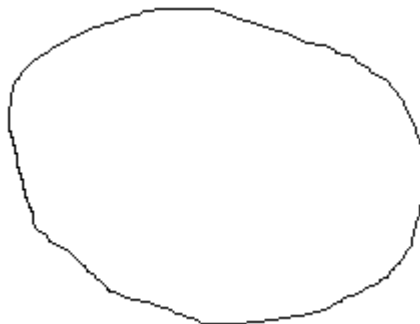


Figura 1 – Corpo convexo

Se ao invés de um corpo convexo tivermos um corpo não convexo na situação acima, além das transferências descritas acima teremos também uma troca de calor por radiação (direta) entre pontos diferentes sobre a fronteira do corpo. Isto ocorrerá porque há pontos da fronteira que se “enxergam”. A transferência de calor por radiação entre pontos sobre a fronteira do corpo é governada por equações integrais de Fredholm de Segunda Espécie que por sua vez estarão diretamente envolvidas nas condições de contorno. Este tipo de corpo não será abordado neste trabalho.

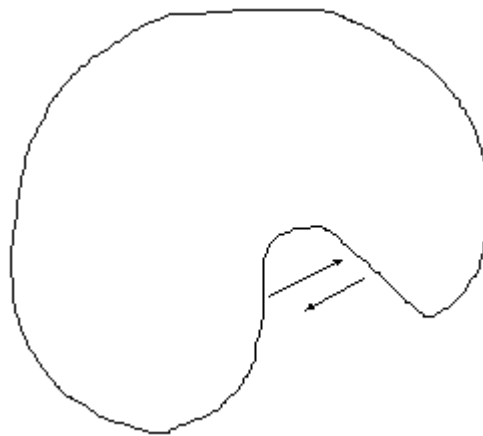


Figura 2 – Corpo não convexo

1.1 Transmissão de calor no interior do corpo

A conservação da energia é um dos cinco postulados básicos da Mecânica dos Meios Contínuos. Este postulado dá origem à seguinte equação diferencial, válida para todo e qualquer subconjunto material de um dado corpo,

$$\rho \left(\frac{D}{Dt} \left(u + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) \right) = -\text{div} \mathbf{q} + \text{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \dot{q} \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

onde Ω é um conjunto aberto e limitado pertencente ao \square^M ($M=1, 2$ ou 3), D/Dt representa a derivada material, div representa o operador divergente, ρ representa

a densidade, u a energia interna específica, \mathbf{v} a velocidade, \mathbf{q} o fluxo de calor por unidade de tempo e área, \mathbf{T} o tensor de Cauchy, \mathbf{g} a força de corpo externa por unidade de massa e \dot{q} a taxa de fornecimento de calor por unidade de tempo e volume.

Impondo que as equações de continuidade e de quantidade de movimento sejam satisfeitas para o corpo em questão, podemos reduzir (1) à seguinte forma

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\text{div } \mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot \text{grad } \mathbf{v} + \dot{q} \quad \text{em } \Omega \quad (2)$$

onde grad representa o operador gradiente.

Sob as hipóteses do corpo rígido e em repouso, a equação (2) se reduz a

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{q} + \dot{q} \quad \text{em } \Omega \quad (3)$$

onde $\partial T / \partial t$ representa a derivada parcial com relação ao tempo, c o calor específico e T a temperatura.

A hipótese de o corpo opaco (que não transmite energia por radiação) faz com que \dot{q} represente apenas uma taxa de geração de calor por unidade de tempo e volume. Este campo \dot{q} pode depender da temperatura T e da posição espacial.

Para processos em regime permanente, objetivo deste trabalho, a equação (3) se reduz a

$$-\text{div } \mathbf{q} + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4)$$

1.2 Lei de Fourier

Para todos os fenômenos envolvendo transporte de energia no interior de corpos neste trabalho, a Lei de Fourier será empregada para correlacionar o campo de temperaturas com o fluxo local de calor.

A Lei de Fourier é uma equação constitutiva que, para materiais isotrópicos, estabelece que

$$\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} T \quad (5)$$

onde T é o campo de temperaturas, \mathbf{q} o vetor fluxo de calor por unidade de tempo e área e k é a condutividade térmica. A condutividade térmica k é um campo escalar que pode depender da posição e da temperatura.

A forma da equação (5) é a mais simples possível satisfazendo os princípios básicos da Termomecânica dos Meios Contínuos, como o princípio da indiferença material.

Nos últimos anos muitas críticas vêm sendo feitas ao uso da Lei de Fourier em situações onde existam grandes variações de temperatura em pequenas regiões (grandes gradientes). No entanto, experimentos realizados com diversos materiais demonstram que para gradientes até a ordem de $300^\circ\text{C}/\text{cm}$ a referida Lei não apresenta discrepâncias significativas com a realidade. O mesmo pode ser garantido para gases, mesmo a pressões muito baixas (na ordem de $0,0000001$ atmosfera) e o gradientes de temperatura muito altos.

Combinando (4) e (5), obtemos a seguinte equação diferencial parcial elíptica

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (6)$$

a qual governará os processos de transferência de calor, em regime permanente, no interior do corpo contínuo representado pelo conjunto aberto limitado Ω .

1.3 Condições de contorno usuais e suas limitações

Amparadas pelo apelo didático e pela simplicidade de sua utilização as condições de contorno em geral associadas ao problema (6) são do seguinte tipo

$$T = \hat{F}(\mathbf{X}) \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \quad \text{e} \quad \text{grad } T \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_2 \quad (7)$$

onde $\hat{F}(\mathbf{X})$ é uma função conhecida sobre $\partial\Omega_1$ ($\partial\Omega_1$ não pode ser um conjunto vazio), $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega$ representa a fronteira de Ω e \mathbf{n} representa o vetor normal unitário exterior.

A condição de contorno acima impõe que a temperatura seja prescrita sobre uma parte da fronteira e que a outra parte seja termicamente isolada (isto é, tenha fluxo normal de calor nulo). Este tipo de condição de contorno, apesar de matematicamente conveniente, é bastante limitado no que diz respeito à representação de fenômenos reais. Não há como se impor na prática uma temperatura sobre uma parte da fronteira do corpo bem como não há fronteiras perfeitamente adiabáticas.

As condições de contorno aceitáveis para a equação (2.6) são aquela que surgem a partir das condições de salto no flux normal de energia através da fronteira $\partial\Omega$. Em outras palavras, devemos impor que o fluxo normal de calor por unidade de tempo e área chegando por condução à fronteira do corpo (proveniente do seu interior) seja igual ao fluxo normal de calor por unidade de tempo e área deixando esta fronteira em direção a vizinhança.

Por exemplo, se admitirmos que o corpo troca calor por convecção com a sua vizinhança teremos a seguinte condição de contorno.

$$-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = q_{CONV} \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (8)$$

Se admitirmos que q_{CONV} é dado pela Lei de Newton do Resfriamento e que a vizinhança está a uma temperatura T_∞ com coeficiente de filme h , teremos

$$-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = h(T - T_\infty) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (9)$$

A condição de contorno linear acima é a mais simples que existe dentro de um contexto fisicamente admissível, Quanto mais aquecido estiver o corpo maior será a perda de calor deste para o universo que o cerca.

Além disso, a condição (9) tem como caso limite, a condição (7) já que:

a) se $h \rightarrow 0$ sobre $\partial\Omega_2$ teremos o caso da superfície isolada;

b) se $h \rightarrow \infty$ sobre $\partial\Omega_1$ teremos o caso de temperatura prescrita ($T = T_\infty$). T_∞ poderia ser exatamente $\hat{F}(\mathbf{X})$.

Infelizmente a condição de contorno (9) não se adéqua a todas as aplicações. Muitas vezes é necessário considerar condições muito mais complexas sobre $\partial\Omega$. Para ilustrar este fato consideremos que o corpo representado por Ω fosse um corpo negro convexo imerso no vácuo (sem a presença de outros emissores/refletores de radiação térmica). Neste caso a condição de contorno seria

$$-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = q_{RAD} \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (10)$$

onde q_{RAD} representa o fluxo de calor por unidade de tempo e área deixando a superfície $\partial\Omega$ em cada ponto. Uma vez que o corpo é negro e convexo, (1) é representada por

$$-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = \sigma T^4 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (11)$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann e T representa a temperatura absoluta.

Quando o corpo não for convexo a equação (11) não será mais suficiente para representar a condição de contorno, isto porque haverá emissão direta do corpo ara ele mesmo. Neste caso teremos que incorporar a (11) um operador integral ficando com uma expressão do tipo

$$-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = \sigma T^4 - \int_{\mathbf{Y} \in \partial\Omega} \hat{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \sigma T^4 dS \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (12)$$

onde $\hat{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ é uma função que depende da geometria do corpo.

Se o corpo for cinzento nem mesmo a forma apresentada em (12) será suficiente para descrever o que ocorre sobre a fronteira, como veremos a seguir.

1.4 Transmissão de calor por radiação – corpos cinzentos

Uma das suposições mais comuns em engenharia é a de que as propriedades associadas à radiação térmica não dependem do comprimento de onda da radiação. Tal hipótese caracteriza as chamadas “superfícies cinzentas”.

Neste trabalho a discussão será limitada a superfícies cinzentas difusas. Uma superfície cinzenta difusa reflete a energia radiante térmica de maneira uniforme e independente da história da radiação incidente. Isto permite uma simplificação na abordagem matemática possibilitando a combinação direta das parcelas emitida e refletida da radiação.

Os corpos cinzentos são, na verdade, generalizações dos corpos negros. A energia emitida por radiação, por unidade de tempo e área, a partir de um ponto sobre a superfície de um corpo cinzento, é dada por

$$e = \varepsilon e_b = \varepsilon \sigma T^4 \quad (13)$$

onde e_b é a energia emitida por radiação, por unidade de tempo e área, a partir de um ponto sobre a superfície de um corpo negro à temperatura T e ε é a emissividade da superfície ($0 < \varepsilon < 1$). Quando $\varepsilon = 1$ o corpo é dito negro, pois o corpo negro é aquele que apresenta o maior poder emissivo possível.

Diferentemente do corpo negro, o corpo cinzento não absorve toda a energia radiante incidente. Parte dela é refletida. Assim, duas outras propriedades (ambas não negativas) são definidas, por conveniência: a absorptância α e a reflectância ρ .

Pelo princípio de conservação de energia, podemos garantir para um corpo opaco que

$$\alpha + \rho = 1 \quad (14)$$

A Lei de Kirchhoff assegura que

$$\alpha = \varepsilon \quad (15)$$

e assim podemos escrever

$$\rho = 1 - \varepsilon \quad (16)$$

Para superfícies cinzentas difusas torna-se interessante introduzir o conceito de radiosidade, denotada aqui pela letra B , a qual é definida como a soma das energias emitida e refletida (representa de fato a energia radiante térmica total emergente por unidade de tempo e área) sendo dada por

$$B = \varepsilon \sigma T^4 + \rho H \quad (17)$$

onde H representa a energia radiante térmica incidente por unidade de tempo e área proveniente da fronteira do próprio corpo e de alguma fonte externa de radiação (conhecida) cuja incidência seja conhecida (representa abaixo sobre $\partial\Omega$ pela função c que é um dado do problema).

Para um dado ponto sobre a fronteira de um corpo a energia radiante térmica incidente por unidade de tempo e área H é dada por

$$H = \hat{H}(\mathbf{X}) = \int_{\mathbf{Y} \in \partial\Omega} \hat{B}(\mathbf{Y}) \hat{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) dS + \hat{c}(\mathbf{X}) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in \partial\Omega \quad (18)$$

onde $\hat{H}(\mathbf{X})$ representa a função H como função da posição \mathbf{X} sobre $\partial\Omega$, $\hat{B}(\mathbf{X})$ representa função B (radiosidade) como função da posição \mathbf{X} sobre $\partial\Omega$, $\hat{c}(\mathbf{X})$ representa a função c (efeito de fontes externas de radiação térmica) como função da posição \mathbf{X} sobre $\partial\Omega$ e o núcleo $\hat{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ é a função dada por

$$\hat{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \begin{cases} \frac{[(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{X}}]_+ [(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{Y}}]_+}{\pi [(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y})]^2} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Se os pontos } \mathbf{X} \text{ e } \mathbf{Y} \text{ puderem} \\ \text{ser conectados por uma linha} \\ \text{reta que não seja interceptada} \\ \text{por nenhum meio opaco} \end{array} \right. \\ 0 & \text{Em qualquer outro caso} \end{cases} \quad (19)$$

onde “[]₊” representa a parte positiva do argumento entre colchetes, \mathbf{X} é um ponto sobre a fronteira $\partial\Omega$, \mathbf{Y} é também um ponto sobre a fronteira $\partial\Omega$, \mathbf{n}_x é o vetor normal unitário exterior sobre $\partial\Omega$ no ponto \mathbf{X} e \mathbf{n}_y é o vetor normal unitário exterior sobre $\partial\Omega$ no ponto \mathbf{Y} .

A conservação de energia num espaço fechado permite concluir que

$$0 \leq \int_{\mathbf{Y} \in \partial\Omega} \hat{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) dS \leq 1 \quad \text{para qualquer } \mathbf{X} \in \partial\Omega \quad (20)$$

o que é muitas vezes denominado de “conservação do fator de forma”.

Na quase totalidade das aplicações a desigualdade acima é estrita e satisfaz à relação abaixo

$$\int_{\mathbf{Y} \in \partial\Omega} \hat{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) dS \leq \mu < 1 \quad \text{para qualquer } \mathbf{X} \in \partial\Omega \quad (21)$$

onde μ é uma constante positiva.

Combinando (17) com (18) chegamos à equação de conservação da energia radiante térmica

$$B = \varepsilon\sigma T^4 + \rho \left(\int_{\partial\Omega} B K dS + c \right) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (22)$$

onde $B = \hat{B}(\mathbf{X})$ para todo $\mathbf{X} \in \partial\Omega$, $\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\mathbf{X})$ para todo $\mathbf{X} \in \partial\Omega$, $T = \hat{T}(\mathbf{X})$ para todo $\mathbf{X} \in \Omega$, $\rho = \hat{\rho}(\mathbf{X})$ para todo $\mathbf{X} \in \partial\Omega$, $c = \hat{c}(\mathbf{X})$ para todo $\mathbf{X} \in \partial\Omega$ e $K = \hat{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ para todo $\mathbf{X} \in \partial\Omega$ e $\mathbf{Y} \in \partial\Omega$. É importante ressaltar que

$$K \equiv \hat{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \hat{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \quad \text{para } \mathbf{X} \in \partial\Omega \text{ e } \mathbf{Y} \in \partial\Omega \quad (23)$$

e que, a variável espacial \mathbf{Y} é utilizada como variável de integração.

1.5 O acoplamento entre a condução e a radiação térmica

O tema central deste trabalho é o estudo da transferência de calor em corpos imersos em meios não participantes.

Com base nas informações anteriores considere um sistema composto por um corpo rígido, opaco cinzento e em repouso, imerso num meio não participante e uma fonte externa de radiação térmica representada pela função c definida sobre $\partial\Omega$. Neste corpo haverá um processo de transmissão de calor por condução descrito pela equação diferencial

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (24)$$

a qual deverá estar sujeita a condições de contorno.

A condição de contorno para a equação acima será a já discutida condição de continuidade do fluxo normal de calor, num contexto onde toda troca de calor entre corpo e vizinhança se dê por radiação. Assim,

$$-k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = q_{RAD} \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (25)$$

O calor transferido (por unidade de tempo e área) a partir de cada ponto sobre a fronteira do corpo, por radiação térmica, é dado pela diferença entre a energia emergente (radiosidade) e a energia incidente, ambas por unidade de tempo e área. Desta forma pode-se reescrever (25) na forma abaixo

$$-k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = B - H \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (26)$$

ou ainda, considerando (18),

$$-k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = B - \int_{\partial\Omega} B K dS + c \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (27)$$

Combinando agora (22), (24) e (27) chega-se a descrição matemática do processo de transmissão de calor condução/radiação num sistema de N corpos rígidos, opacos e em repouso imersos num meio não participante. Tal descrição é representada por

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= B - \int_{\partial\Omega} B K \, dS + c \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ B &= \varepsilon\sigma T^4 + \rho \left(\int_{\partial\Omega} B K \, dS + c \right) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (28)$$

sendo inerentemente não linear e consistindo de uma equação diferencial parcial elíptica (definida na região Ω) sujeita a condições de contorno (representando a continuidade dos fluxos de calor) e a uma equação integral de Fredholm de segunda espécie definida também sobre a fronteira $\partial\Omega$ (representando a conservação da energia adiante térmica)

O problema (28) não é suficiente para uma descrição física completa. Uma vez que o campo T representa uma temperatura absoluta, a solução de (28) deve satisfazer a restrição termodinâmica abaixo

$$T \geq 0 \quad \text{em } \bar{\Omega} \quad (29)$$

1.6 Modelo matemático resultante para um corpo convexo

Quando Ω é convexo não há troca direta de energia radiante térmica entre pontos da fronteira do corpo ($K \equiv 0$). Assim, temos a descrição mais simples possível para o problema (2.28) que, com a restrição (2.29) se reduz a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= B - c \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ B &= \varepsilon\sigma T^4 + \rho c \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (30)$$

$$T \geq 0 \quad \text{em } \bar{\Omega}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \dot{q} &= 0 && \text{em } \Omega \\ -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= \varepsilon \sigma T^4 - \varepsilon c && \text{sobre } \partial\Omega \\ T &\geq 0 && \text{em } \bar{\Omega} \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \dot{q} &= 0 && \text{em } \Omega \\ -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= \varepsilon \sigma T^4 - \varepsilon c && \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

$T \geq 0$ em $\bar{\Omega}$ uma vez que $\varepsilon = 1 - \rho$.

2 MODELAGEM DA TRANSMISSÃO DE CALOR NUM CORPO RÍGIDO, OPACO, CINZENTO E CONVEXO

Considere o corpo C representado pelo conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$. Se este corpo estiver em repouso, for rígido e opaco, o processo de transferência de energia no seu interior é a condução de calor.

Se o corpo C estiver imerso num meio não opaco, haverá transmissão de calor por radiação térmica entre o corpo e o universo exterior. Se o corpo C estiver imerso num meio material deformável (fluido, por exemplo) haverá troca de calor por convecção entre o corpo e o ambiente exterior.

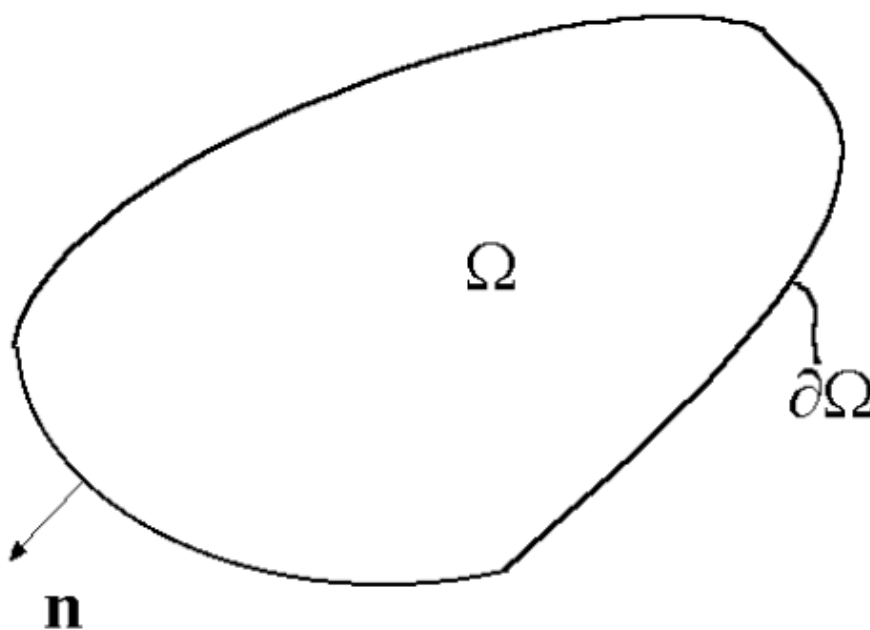


Figura 3 – O corpo em estudo (convexo)

Neste trabalho será considerado que o corpo C esteja imerso num meio fluido não opaco, de tal forma que a troca de calor através da fronteira $\partial\Omega$ se processe por convecção e por radiação térmica. Para simplificar o modelo matemático, a superfície $\partial\Omega$ será suposta cinzenta e corpo será suposto convexo (um corpo convexo não recebe radiação térmica diretamente da própria superfície).

A hipótese de superfície cinzenta consiste em supor que as propriedades físicas de $\partial\Omega$ independem do comprimento de onda da radiação.

O transporte de energia no interior da região $\partial\Omega$ se dá por condução de calor. Este processo de energia (corpo rígido em repouso) é governado pela seguinte forma reduzida da equação geral da energia

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div } \mathbf{q} + \dot{q} \quad \text{em } \Omega \quad (32)$$

onde \mathbf{q} representa o vetor fluxo de calor (energia por unidade de tempo e de área), \dot{q} é a taxa de geração interna de calor por unidade de volume e T representa o campo de temperaturas. Neste trabalho serão considerados apenas os processos em regime permanente, ou seja, processos onde a temperatura T não dependa do tempo. Nestes casos a equação da energia se reduz a

$$\text{div } \mathbf{q} + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (33)$$

O vetor fluxo de calor \mathbf{q} é dado, pela Lei de Fourier, por

$$\mathbf{q} = -k \text{ grad } T \quad (34)$$

onde k representa a condutividade térmica. Neste trabalho a condutividade térmica será suposta constante e escalar (corpo homogêneo e isotrópico).

Combinando as equações acima temos então a condução de calor em Ω descrita como

$$\text{div}(k \text{ grad } T) + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (35)$$

A condição de contorno para esta equação diferencial surge da continuidade do fluxo normal de calor através da fronteira $\partial\Omega$. Especificamente, a energia que (vindo do interior do corpo) chega à fronteira deixa o corpo por convecção e/ou por radiação. Esta condição de contorno pode ser matematicamente representada por

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_{RAD} + q_{CONV} \text{ sobre } \partial\Omega \quad (36)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário exterior definido sobre $\partial\Omega$, q_{RAD} é o calor (por unidade de tempo e área) perdido por radiação e q_{CONV} é o calor (por unidade de tempo e área) perdido por convecção.

Para a convecção vamos considerar a Clássica (linear) Lei de Newton do resfriamento, que estabelece o seguinte

$$q_{CONV} = h(T - T_{\infty}) \text{ sobre } \partial\Omega \quad (37)$$

onde h e T_{∞} são supostos constantes.

Para a radiação térmica vamos levar em conta que o corpo é convexo e cinzento e que existe uma fonte externa de radiação (cujo efeito é representado aqui através do termo s) para escrever que

$$q_{RAD} = \varepsilon\sigma |T|^3 T - s \text{ sobre } \partial\Omega \quad (38)$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann e ε é a emissividade [20,22].

É interessante mencionar aqui que o conceito de “corpo cinzento” é uma idealização que visa preservar o caráter difuso da emissão do corpo negro ao mesmo tempo em que incorpora o comportamento das superfícies reais (que refletem energia e cujo poder emissivo é inferior àquele do corpo negro).

Combinando as equações acima, temos o seguinte modelo matemático

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= q_{RAD} + q_{CONV} \text{ sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (39)$$

ou seja,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} T) + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (40)$$

$$-k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = h(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma |T|^3 T - s \text{ sobre } \partial\Omega$$

onde a incógnita é o campo de temperaturas T .

Em [17] temos um estudo completo sobre a existência, a unicidade e a regularidade da solução da equação acima.

3 MODELAGEM DA FONTE EXTERNA DE RADIAÇÃO E DO SEU EFEITO SOBRE A PLACA

A fonte externa de radiação (por exemplo uma chama) será tratada como uma pequena esfera negra de raio a , com temperatura uniforme T_s , dissipando calor numa taxa constante Q (dada), que não é afetada pela presença da placa. A fonte é localizada numa altura H acima da superfície superior da placa (denotada por $\partial\Omega_U$). Desta forma, a fonte será um emissor de energia radiante térmica difusa e a taxa de energia radiante térmica por unidade de área (por exemplo em W/m²) que, partindo da fonte externa, incide sobre o ponto \mathbf{x} sobre a fronteira da placa é dada por [20]

$$s = \hat{s}(\mathbf{x}) = \int_{\xi \in \partial\Gamma} \sigma T_s^4 K(\mathbf{x}, \xi) dA, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (41)$$

onde a esfera de raio a é representada pelo conjunto Γ , com fronteira $\partial\Gamma$, dados por

$$\Gamma \equiv \{\mathbf{x} = (x, y, z) \text{ tais que } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < a^2\}$$

$$\partial\Gamma \equiv \{\mathbf{x} = (x, y, z) \text{ tais que } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2\}$$

e a placa é representada pelo conjunto Ω com fronteira $\partial\Omega$, dados por

$$\Omega \equiv \{\mathbf{x} = (x, y, z) \text{ tais que } (x, y) \in D \text{ e } -\delta < z < \delta\}$$

$$\partial\Omega \equiv \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_L \cup \partial\Omega_0$$

$$\partial\Omega_U \equiv \{\mathbf{x} = (x, y, z) \text{ tais que } (x, y) \in D \text{ e } z = \delta\}$$

$$\partial\Omega_L \equiv \{\mathbf{x} = (x, y, z) \text{ tais que } (x, y) \in D \text{ e } z = -\delta\}$$

$$\partial\Omega_0 \equiv \{\mathbf{x} = (x, y, z) \text{ tais que } (x, y) \in \partial D \text{ e } -\delta < z < \delta\}$$

onde D é um domínio aberto e convexo contido no \square^2 .

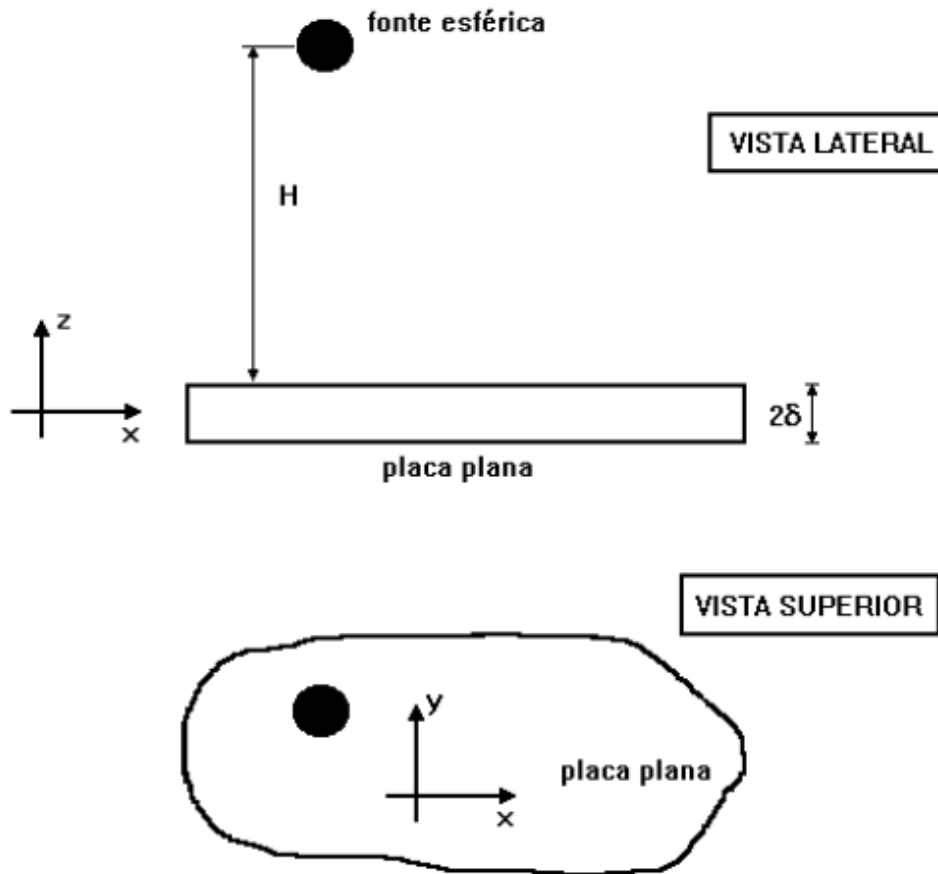


Figura 4 – Esquema ilustrativo da fonte de calor e da placa plana

Neste trabalho será suposto que a fonte de radiação (esfera) esteja contida no cilindro gerado pela placa plana (que caracteriza a seção reta do cilindro), de forma que não haja incidência direta da radiação emitida pela fonte sobre a borda lateral da placa ($\partial\Omega_0$).

O núcleo da integral acima (fator de forma) é dado por

$$K(\mathbf{x}, \xi) = -\Psi(\mathbf{x}, \xi) \left\{ \frac{[(\mathbf{x} - \xi) \cdot \mathbf{m}][(\mathbf{x} - \xi) \cdot \mathbf{n}]}{\pi [(\mathbf{x} - \xi) \cdot (\mathbf{x} - \xi)]^2} \right\}, \text{ para } \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ e } \xi \in \partial\Gamma \quad (42)$$

onde \mathbf{m} é o vetor normal unitário exterior definido no ponto $\xi \in \partial\Gamma$, \mathbf{n} é o vetor normal unitário exterior definido no ponto $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ e a função $\Psi(\mathbf{x}, \xi)$ é tal que

$$\Psi(\mathbf{x}, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{se um reta ligando } \mathbf{x} \text{ e } \xi \text{ contiver pontos de } \Gamma \text{ ou de } \Omega \\ 1 & \text{se um reta ligando } \mathbf{x} \text{ e } \xi \text{ não contiver pontos de } \Gamma \text{ ou de } \Omega \end{cases} \quad (43)$$

Sendo a fronteira $\partial\Omega$ a união dos subconjuntos $\partial\Omega_U$, $\partial\Omega_L$ e $\partial\Omega_0$, podemos concluir que $\Psi(\mathbf{x}, \xi) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega_L$ e para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega_0$. Assim, sobre estas superfícies,

$$s = \hat{s}(\mathbf{x}) = \int_{\xi \in \partial\Gamma} \sigma T_s^4 K(\mathbf{x}, \xi) dA = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_L \quad (44)$$

Para determinar s sobre $\partial\Omega_U$ vamos considerar o seguinte esquema sugerido na figura abaixo

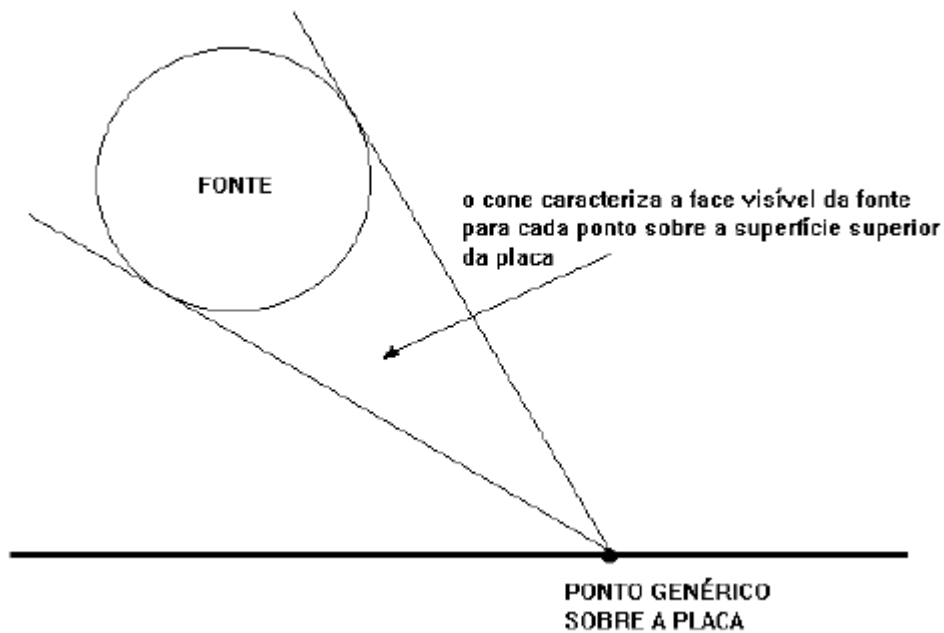


Figura 5 – Esquema para cálculo de s

Um dado ponto $\mathbf{x} \in \partial\Omega_U$ recebe energia radiante térmica da parte da superfície $\partial\Gamma$ que o “enxerga” (vide o cone da figura). Assim, considerando um sistema esférico de coordenadas centrado no centro da fonte e um sistema cartesiano retangular $[x', y', z']$ com o vetor unitário associado ao eixo z' na mesma

direção e sentido do vetor \mathbf{x} podemos representar um ponto genérico sobre $\partial\Gamma$ como

$$\xi = a \cos \theta \text{sen} \phi \mathbf{i}' + a \text{sen} \theta \text{sen} \phi \mathbf{j}' + a \cos \phi \mathbf{k}' \quad (45)$$

e um ponto genérico $\mathbf{x} \in \partial\Omega_U$ como (baseado na definição do subconjunto $\partial\Omega_U$)

$$\mathbf{x} = \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} \right) \mathbf{k}' \quad (46)$$

Os vetores \mathbf{n} e \mathbf{m} serão dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \cos \theta \text{sen} \phi \mathbf{i}' + \text{sen} \theta \text{sen} \phi \mathbf{j}' + \cos \phi \mathbf{k}' \\ \mathbf{n} &= \mathbf{k}' \quad (\text{referente ao sistema cartesiano original}) \end{aligned} \quad (47)$$

O subconjunto $\partial\Gamma^* \subset \partial\Gamma$ formado pelos pontos $\xi \in \partial\Gamma$, para os quais $K(\mathbf{x}, \xi)$ não é nulo, é caracterizado por

$$0 \leq \phi < \arccos \sqrt{\frac{a^2}{H^2 + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \quad (48)$$

Se levarmos em conta que

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \xi) \cdot \mathbf{m} &= \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} \right) \mathbf{k}' \cdot \left[\cos \theta \text{sen} \phi \mathbf{i}' + \text{sen} \theta \text{sen} \phi \mathbf{j}' + \cos \phi \mathbf{k}' \right] = \\ &= \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} \right) \cos \phi \\ (\mathbf{x} - \xi) \cdot \mathbf{n} &= \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} \right) \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' = -H \\ (\mathbf{x} - \xi) \cdot (\mathbf{x} - \xi) &= \\ &= (a \cos \theta \text{sen} \phi)^2 + (a \text{sen} \theta \text{sen} \phi)^2 + \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} - a \cos \phi \right)^2 \end{aligned} \quad (49)$$

teremos, para os pontos onde $K(\mathbf{x}, \xi)$ não é nulo, a seguinte expressão

$$K(\mathbf{x}, \xi) = \frac{H \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} \right) \cos \phi}{\pi \left[(a \cos \theta \sin \phi)^2 + (a \sin \theta \sin \phi)^2 + \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} - a \cos \phi \right)^2 \right]^2} \quad (50)$$

ou ainda,

$$K(\mathbf{x}, \xi) = \frac{H \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} \right) \cos \phi}{\pi \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 - 2a \cos \phi \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} + a^2 \right]^2} \quad (51)$$

A fonte s é então representada por

$$\begin{aligned} s &= \int_{\xi \in \partial \Gamma} \sigma T_s^4 K(\mathbf{x}, \xi) dA = \int_{\xi \in \partial \Gamma^*} \sigma T_s^4 K(\mathbf{x}, \xi) dA = \\ &= \int_0^\lambda \int_0^{2\pi} \frac{(\sigma T_s^4) H \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} \right) a^2 \cos \phi \sin \phi d\theta d\phi}{\pi \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 - 2a \cos \phi \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} + a^2 \right]^2} \end{aligned} \quad (52)$$

onde o ângulo λ é dado por

$$\lambda = \arccos \sqrt{\frac{a^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2}} \quad (53)$$

Vamos levar em conta agora a hipótese de que a fonte seja representada por uma esfera muito pequena (fonte pontual). Esta hipótese equivale a considerar o limite quando o raio da esfera (denotado por a) tende para zero. Nestes casos teremos que

$$\begin{aligned}
& \lim_{a \rightarrow a} K(\mathbf{x}, \xi) = \\
& = \lim_{a \rightarrow a} \left\{ \frac{H \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} \right) \cos \phi}{\pi \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 - 2a \cos \phi \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} + a^2 \right]^2} \right\} = \\
& = \frac{H \cos \phi}{\pi \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 \right)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{54}$$

e, conseqüentemente, (note que agora $\lambda = \pi / 2$)

$$\begin{aligned}
s &= \int_{\xi \in \partial \Gamma} \sigma T_s^4 K(\mathbf{x}, \xi) dA = \int_{\xi \in \partial \Gamma^*} \sigma T_s^4 K(\mathbf{x}, \xi) dA = \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{(\sigma T_s^4) H a^2 \cos \phi \sin \phi d\theta d\phi}{\pi \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 \right)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{55}$$

Integrando vem que

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{(\sigma T_s^4) H a^2 \cos \phi \sin \phi d\theta d\phi}{\pi \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 \right)^{3/2}} = \\
&= \frac{(\sigma T_s^4) H a^2}{\pi \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 \right)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin \phi d\theta d\phi \\
&= \frac{(\sigma T_s^4) H a^2}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 \right)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{56}$$

A fonte é negra e dissipa calor numa taxa Q . Desta forma, podemos concluir que

$$Q = (\sigma T_s^4) 4\pi a^2 \tag{57}$$

ou seja,

$$s = \frac{QH}{4\pi((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2)^{3/2}}, \text{ para todo } (x, y) \in D \quad (58)$$

4 DESCRIÇÃO DO FENÔMENO NUMA PLACA PLANA DELGADA

Vamos considerar agora que o corpo em questão seja caracterizado pela configuração Ω abaixo (placa plana de espessura 2δ)

$$\Omega \equiv \{(x, y, z) \text{ tais que } (x, y) \in D \text{ e } -\delta < z < \delta\}$$

onde D representa um domínio (plano) aberto contido no plano $x-y$.

Para efeito de simulação é interessante supor que o corpo que está sendo aquecido pela fonte puntual de radiação térmica seja tratado como bidimensional. Para isso, vamos considerar que a espessura da placa seja suficientemente pequena de modo a assegurar que a diferença entre as temperaturas nas duas faces possa ser desprezada.

Especificamente, sob o ponto de vista matemático, nossa hipótese pode ser escrita por

$$\theta = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} T dz, \quad |\theta - T| < \Delta \quad \text{para todo } x \text{ e } y \text{ dados} \quad (59)$$

onde Δ é um número positivo suficientemente pequeno, significando que a diferença entre o valor médio (na espessura) e o valor local são muito próximos.

No sistema cartesiano retangular (levando em conta que a condutividade térmica é constante) a equação diferencial parcial que governa a condução de calor é a seguinte

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (60)$$

Integrando toda a equação sobre z , de $-\delta$ até $+\delta$, ficamos com

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dz + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\delta} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{\dot{q}}{k} \right) dz = 0 \quad \text{em } D \quad (61)$$

Levando em conta a condição de contorno original (lembrando que a fronteira do corpo foi representada pela união de três subconjuntos), teremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{k} \text{ sobre } \partial\Omega_U \\ \mathbf{n} &= -\mathbf{k} \text{ sobre } \partial\Omega_L \end{aligned} \quad (62)$$

Assim,

$$\begin{aligned} -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= -k \frac{\partial T}{\partial z} = h(T - T_\infty) + \varepsilon\sigma |T|^3 T - s = F_U \text{ sobre } \partial\Omega_U \\ (\text{onde } z = +\delta) \\ -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= -k \frac{\partial T}{\partial z} = h(T - T_\infty) + \varepsilon\sigma |T|^3 T = F_L \text{ sobre } \partial\Omega_L \\ (\text{onde } z = -\delta) \end{aligned} \quad (63)$$

Logo,

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dz - \frac{F_U + F_L}{k} + \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{\dot{q}}{k} \right) dz = 0 \text{ em } D \quad (64)$$

Definindo a função θ como na primeira equação deste capítulo, teremos que

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{F_U + F_L}{2k\delta} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \text{ em } D \quad (65)$$

Em função da hipótese inicial, a relação funcional entre F_U e F_L e T é a mesma que entre F_U e F_L e θ .

Em função da pequena espessura da placa, a perda de calor pela fronteira de D será pequena. Assim, suporemos, na fronteira de D , fluxo normal de calor nulo (fronteira isolada). Nosso modelo se reduz então a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \theta) - \frac{F_U + F_L}{2k\delta} + \frac{\dot{q}}{k} &= 0 \text{ em } D \\ \text{com } (\operatorname{grad} \theta) \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sobre } \partial D \end{aligned} \quad (66)$$

Na equação acima, os operadores divergente e gradiente são considerados no plano $x-y$.

Levando em consideração as definições de F_U e F_L ficamos com

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \theta) - \frac{h(\theta - T_\infty) + \varepsilon\sigma|\theta|^3}{k\delta} + \frac{s}{2k\delta} + \frac{\dot{q}}{k} &= 0 \text{ em } D \\ \text{com } (\operatorname{grad} \theta) \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sobre } \partial D \end{aligned} \quad (67)$$

O campo s foi determinado no capítulo anterior, sendo dado por

$$s = \frac{QH}{4\pi((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2)^{3/2}}, \text{ para todo } (x, y) \in D \quad (68)$$

Assim, no sistema cartesiano retangular, a descrição matemática do problema fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{h}{k\delta} \theta - \frac{\varepsilon\sigma}{k\delta} |\theta|^3 \theta + \frac{QH}{8\pi k\delta} ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2)^{-3/2} + \\ + \left(\frac{hT_\infty}{k\delta} + \frac{\dot{q}}{k} \right) &= 0 \text{ em } D \end{aligned} \quad (69)$$

com $(\operatorname{grad} \theta) \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre ∂D

o que, para uma placa definida por

$$D \equiv \{(x, y) \text{ tais que } 0 < x < L_x \text{ e } 0 < y < L_y\}$$

é escrito como

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{h}{k\delta} \theta - \frac{\varepsilon \sigma}{k\delta} |\theta|^3 \theta + \frac{QH}{8\pi k\delta} \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 \right)^{-3/2} + \left(\frac{hT_\infty}{k\delta} + \frac{\dot{q}}{k} \right) = 0 \text{ para } 0 < x < L_x \text{ e } 0 < y < L_y$$

$$\text{com} \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ para } x = L_x \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ para } y = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ para } y = L_y \end{cases} \quad (70)$$

5 CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO EXATA

Neste capítulo é construído, em dimensão infinita, a solução do problema

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{h}{k\delta} \theta - \frac{\varepsilon \sigma}{k\delta} |\theta|^3 \theta + \frac{QH}{8\pi k\delta} \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 \right)^{-3/2} + \left(\frac{hT_\infty}{k\delta} + \frac{\dot{q}}{k} \right) = 0 \text{ para } 0 < x < L_x \text{ e } 0 < y < L_y$$

$$\text{com } \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ para } x = L_x \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ para } y = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ para } y = L_y \end{cases} \quad (70)$$

a qual será representada pelo limite de uma seqüência de funções cujos elementos são soluções de problemas lineares.

O problema (70) pode ser representado numa forma mais compacta como

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } \theta) - g(\theta) + f(x, y) &= 0 \text{ em } D \\ (\text{grad } \theta) \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sobre } \partial D \end{aligned} \quad (71)$$

onde

$$D \equiv \{(x, y) \text{ tais que } 0 < x < L_x \text{ e } 0 < y < L_y\}$$

e $f(x, y)$ é uma função conhecida da posição dada por (note que é infinitamente diferenciável em D)

$$f(x, y) = \frac{QH}{8\pi k\delta} \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 \right)^{-3/2} + \left(\frac{hT_\infty}{k\delta} + \frac{\dot{q}}{k} \right) \quad (72)$$

e $g(\theta)$ é uma função estritamente crescente de θ (e que só depende de θ) dada por

$$g(\theta) = \frac{h}{k\delta}\theta + \frac{\varepsilon\sigma}{k\delta}|\theta|^3 \quad \theta = a\theta + b|\theta|^3 \quad \theta \quad (73)$$

onde a e b são constantes positivas conhecidas (definidas a partir da equação acima (73)). Além de ser estritamente crescente, a função $g(\theta)$ possui a seguinte propriedade

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} g(\theta) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\theta \rightarrow -\infty} g(\theta) = -\infty \quad (74)$$

A estrutura de $g(\theta)$ assegura a existência e a unicidade de solução do problema aqui em estudo [5].

A solução (a função θ) do problema em estudo pode ser representada por

$$\theta = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i \quad \text{em} \quad D \cup \partial D \quad (75)$$

onde os campos φ_i são obtidos a partir da solução do problema linear abaixo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi_i) - \alpha \varphi_i + \beta_i &= 0 \quad \text{em} \quad D \\ \text{com} \quad (\operatorname{grad} \varphi_i) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial D \\ \text{onde} \quad \beta_i &= \alpha \varphi_{i-1} - g(\varphi_{i-1}) + f(x, y) \end{aligned} \quad (76)$$

sendo $\varphi_0 \equiv 0$ em D . O problema (76), já que é definido no plano $x-y$, também pode ser escrito como

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} - \alpha \varphi_i + \beta_i = 0 \text{ para } 0 < x < L_x \text{ e } 0 < y < L_y$$

$$\text{com } \begin{cases} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0 \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0 \text{ para } x = L_x \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0 \text{ para } y = 0 \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0 \text{ para } y = L_y \end{cases} \quad (77)$$

$$\text{onde } \beta_i = \alpha \varphi_{i-1} - g(\varphi_{i-1}) + f(x, y)$$

A seqüência $[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots]$ é não decrescente e limitada superiormente. Além disso, todos os seus elementos são infinitamente diferenciáveis da mesma forma que é o seu limite. A constante α acima deve ser escolhida de tal forma que

$$\alpha > g'(\theta) \text{ em } D \quad (78)$$

o que, no caso de θ positivo (que é o caso, pois θ representa uma temperatura absoluta), pode ser escrito como

$$\alpha \geq \frac{h}{k\delta} + \frac{4\varepsilon\sigma}{k\delta} |\theta|^3 = a + 4b|\theta|^3 \text{ para todo } (x, y) \in D \quad (79)$$

Logo, denotando por θ_{MAX} o maior valor assumido por θ em D , podemos escolher qualquer constante α tal que

$$\alpha \geq \frac{h}{k\delta} + \frac{4\varepsilon\sigma}{k\delta} |\theta_{MAX}|^3 = a + 4b|\theta_{MAX}|^3 \quad (80)$$

Não é difícil estimar, a priori, um limite superior (um valor máximo) para θ . Para isso, consideremos a função w , solução do problema abaixo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) - g(w) + \sup[f(x, y)] &= 0 \text{ em } D \\ \text{com } (\operatorname{grad} w) \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sobre } \partial D \end{aligned} \quad (81)$$

que é dada por

$$w = g^{-1} \left(\sup_D [f(x, y)] \right) = \text{constante para } 0 < x < L_x \text{ e } 0 < y < L_y \quad (82)$$

Combinando as equações envolvendo θ e w , temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} (w - \theta)) - g(w) + g(\theta) - f(x, y) + \sup[f(x, y)] &= 0 \text{ em } D \\ \text{com } \operatorname{grad} (w - \theta) \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sobre } \partial D \end{aligned} \quad (83)$$

o que nos permite escrever a seguinte inequação

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} (w - \theta)) - g(w) + g(\theta) &\leq 0 \text{ em } D \\ \text{com } \operatorname{grad} (w - \theta) \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sobre } \partial D \end{aligned} \quad (84)$$

Integrando a desigualdade acima sobre uma vizinhança do ponto (x_-, y_-) denotada por $D_- \subseteq D \cup \partial D$. Ficamos então com

$$\int_{D_-} \operatorname{div}(\operatorname{grad} (w - \theta)) dS \leq \int_{D_-} (g(w) - g(\theta)) dS \quad (85)$$

o que permite concluir que

$$\int_{\partial D_-} \operatorname{grad} (w - \theta) \cdot \mathbf{n} dl \leq \int_{D_-} (g(w) - g(\theta)) dS \quad (86)$$

onde a curva fechada ∂D_- é a fronteira de D_- .

Supondo agora que o mínimo absoluto de $(w - \theta)$ ocorra em D_- . Neste caso tem-se necessariamente o seguinte

$$0 \leq \int_{D_-} (g(w) - g(\theta)) dS \quad (87)$$

Como g é estritamente crescente e D_- é uma vizinhança tão pequena quanto queiramos, pode-se concluir que $(w - \theta)$ é positivo em (x_-, y_-) . Logo,

$$\min_D (w - \theta) \geq 0 \Rightarrow w \geq \theta \text{ em } D \quad (88)$$

Assim,

$$\theta_{MAX} \leq g^{-1} \left(\sup_D [f(x, y)] \right) \quad (89)$$

Uma vez que

$$\sup_D [f(x, y)] \leq \frac{QH}{8\pi k \delta H^2} + \frac{hT_\infty}{k\delta} + \frac{\dot{q}}{k} \quad (90)$$

pode-se escrever que

$$\theta_{MAX} \leq g^{-1} \left(\frac{QH}{8\pi k \delta H^2} + \frac{hT_\infty}{k\delta} + \frac{\dot{q}}{k} \right) \quad (91)$$

ou ainda,

$$\theta_{MAX} \leq \left\{ \left(\frac{QH}{8\pi k \delta H^2} + \frac{hT_\infty}{k\delta} + \frac{\dot{q}}{k} \right) \frac{k\delta}{\epsilon\sigma} \right\}^{1/4} \quad (92)$$

que é uma estimativa fácil de ser empregada.

Desta forma é possível sempre usar

$$\alpha = \frac{h}{k\delta} + 4 \left(\frac{\varepsilon\sigma}{k\delta} \right)^{1/4} \left(\frac{QH}{8\pi k\delta H^2} + \frac{hT_\infty}{k\delta} + \frac{\dot{q}}{k} \right)^{3/4} \quad (93)$$

Um exemplo ilustrativo simples surge quando supomos que (em algum sistema de unidades) $Q=0$, $\frac{h}{Lk}=1$, $\frac{\varepsilon\sigma}{Lk}=1$, $\frac{hT_\infty}{Lk} + \frac{\dot{q}}{k}=2$.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \theta - |\theta|^3 \theta + 2 = 0 \quad \text{para } 0 < x < L_x \quad \text{e } 0 < y < L_y$$

$$\text{com } \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 & \text{para } x = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 & \text{para } x = L_x \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 & \text{para } y = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 & \text{para } y = L_y \end{cases} \quad (94)$$

sendo a solução exata dada por

$$\theta = 1 \quad \text{para todo } 0 < x < L_x \quad \text{e } 0 < y < L_y \quad (95)$$

Neste caso teremos que os elementos da seqüência $[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots]$ serão obtidos a partir de

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} - \alpha \varphi_i + \beta_i = 0 \text{ para } 0 < x < L_x \text{ e } 0 < y < L_y$$

$$\text{com } \begin{cases} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0 \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0 \text{ para } x = L_x \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0 \text{ para } y = 0 \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0 \text{ para } y = L_y \end{cases} \quad (96)$$

$$\text{onde } \beta_i = \alpha \varphi_{i-1} - \varphi_{i-1} - |\alpha \varphi_{i-1}|^3 \alpha \varphi_{i-1} + 2$$

sendo a estimativa de α (segundo a equação (93)) dada por

$$\alpha = 1 + 4(2^{3/4}) \cong 7,727 \quad (97)$$

Para obter φ_1 temos que resolver o seguinte problema

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \alpha \varphi_1 + \beta_1 = 0 \text{ para } 0 < x < L_x \text{ e } 0 < y < L_y$$

$$\text{com } \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \text{ para } x = L_x \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \text{ para } y = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \text{ para } y = L_y \end{cases} \quad (98)$$

$$\text{onde } \beta_1 = 2$$

Desta forma, podemos concluir que

$$\varphi_1 = \frac{2}{\alpha} \text{ constante, para todo } 0 \leq x \leq L_x \text{ e } 0 \leq y \leq L_y \quad (99)$$

Para obter φ_2 , o problema a ser resolvido é

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \alpha \varphi_2 + \beta_2 = 0 \text{ para } 0 < x < L_x \text{ e } 0 < y < L_y$$

$$\text{com } \begin{cases} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \text{ para } x = L_x \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \text{ para } y = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \text{ para } y = L_y \end{cases} \quad (100)$$

$$\text{onde } \beta_2 = \alpha \varphi_1 - \varphi_1 - |\alpha \varphi_1|^3 \alpha \varphi_1 + 2$$

o que nos leva a seguinte conclusão

$$\varphi_2 = \frac{2}{\alpha} + \varphi_1 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{\varphi_1^4}{\alpha} = \text{constante, para todo } 0 \leq x \leq L_x \text{ e } 0 \leq y \leq L_y \quad (101)$$

que pode ser generalizada para qualquer termo, ou seja

$$\varphi_{i+1} = \frac{2}{\alpha} + \varphi_i \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{\varphi_i^4}{\alpha} = \text{constante, para todo } 0 \leq x \leq L_x \text{ e } 0 \leq y \leq L_y \quad (102)$$

Vamos mostrar agora que a escolha de α influencia na convergência. Considere a Tabela 1 abaixo. É possível observar que não há convergência para $\alpha = 1,5$ e que para $\alpha = 3$, a seqüência não é crescente.

Tabela 1 – Valores de φ_i obtidos para 5 valores diferentes de constantes α

| $\varphi_i =$ | $\alpha = 100$ | $\alpha = 10$ | $\alpha = 5$ | $\alpha = 3$ | $\alpha = 1,5$ |
|---------------|----------------|---------------|--------------|--------------|----------------|
| i=1 | 0.02000000 | 0.20000000 | 0.40000000 | 0.66666670 | 1.33333300 |
| i=2 | 0.03980000 | 0.37984000 | 0.71488000 | 1.04526700 | -0.32921840 |
| i=3 | 0.05940197 | 0.53977440 | 0.91966890 | 0.96559830 | 1.21576200 |
| i=4 | 0.07880783 | 0.67730810 | 0.99266270 | 1.02062100 | 0.28211080 |
| i=5 | 0.09801937 | 0.78853240 | 0.99993570 | 0.98539020 | 1.42314800 |
| i=6 | 0.11703820 | 0.87101780 | 1.00000000 | 1.00931700 | -0.92697640 |
| i=7 | 0.13586600 | 0.92635770 | 1.00000000 | 0.99361400 | 0.53209360 |
| i=10 | 0.19121470 | 0.98929680 | 1.00000000 | 1.00186300 | -0.38758170 |
| i=20 | 0.36354060 | 0.99998930 | 1.00000000 | 1.00003200 | 1.30792200 |
| i=30 | 0.51637130 | 0.99999990 | 1.00000000 | 1.00000100 | 0.29120160 |
| i=50 | 0.75363160 | 0.99999990 | 1.00000000 | 1.00000000 | -0.17921170 |
| i=100 | 0.97445850 | 0.99999990 | 1.00000000 | 1.00000000 | 0.61725770 |

A condição estabelecida para α é suficiente, não necessária. Por esta razão, podemos observar convergência ou não para valores menores do que o estabelecido em (97). No entanto, temos assegurada a convergência para qualquer valor maior que o estabelecido em (97).

6 SIMULAÇÃO NUMÉRICA VIA DIFERENÇAS FINITAS

A construção da solução exata (dimensão infinita) apresentada no capítulo anterior será usada agora como base para a simulação numérica do problema (dimensão finita) via diferenças finitas. Especificamente, vamos buscar uma aproximação para a solução do problema (70) a partir de uma seqüência cujos elementos sejam aproximações para o problema (77) - linear.

Utilizaremos um esquema baseado na figura abaixo

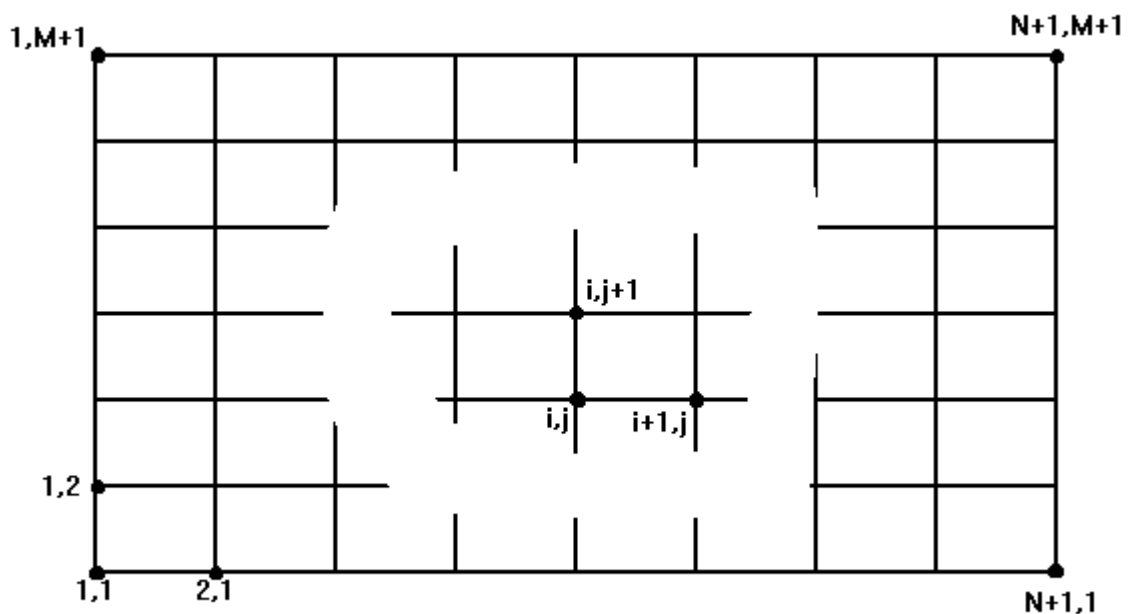


Figura 7– O esquema em diferenças finitas

onde temos $(N + 1)(M + 1)$ nós uniformemente distribuídos.

A aproximação para a função φ_k no nó (i, j) será representada por $\varphi_k^{i,j}$, a posição do nó (i, j) será dada por

$$(x^i, y^j) = ((i-1)\Delta x, (j-1)\Delta y) \quad 1 \leq i \leq N+1, 1 \leq j \leq M+1 \quad (103)$$

onde

$$\Delta x = \frac{L_x}{N} \quad \text{e} \quad \Delta y = \frac{L_y}{M} \quad (104)$$

Na forma discretizada, o problema (77) fica representado pelo sistema algébrico linear de equações abaixo

$$\frac{\varphi_k^{i+1,j} - 2\varphi_k^{i,j} + \varphi_k^{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\varphi_k^{i,j+1} - 2\varphi_k^{i,j} + \varphi_k^{i,j-1}}{(\Delta y)^2} - \alpha\varphi_k^{i,j} + \beta_k^{i,j} = 0$$

para $2 \leq i \leq N$ e $2 \leq j \leq M$

$$\text{com} \begin{cases} \varphi_k^{N+1,j} = \varphi_k^{N,j} & \text{para } 2 \leq j \leq M \\ \varphi_k^{1,j} = \varphi_k^{2,j} & \text{para } 2 \leq j \leq M \\ \varphi_k^{i,M+1} = \varphi_k^{i,M} & \text{para } 2 \leq i \leq N \\ \varphi_k^{i,1} = \varphi_k^{i,2} & \text{para } 2 \leq i \leq N \end{cases} \quad (105)$$

$$\text{onde} \quad \beta_k^{i,j} = \alpha\varphi_{k-1}^{i,j} - g(\varphi_{k-1}^{i,j}) + f(x^i, y^j)$$

Deve ser notado que os vértices da placa não aparecem nas equações acima...

Rearranjando o sistema (105) temos

$$\varphi_k^{i,j} = \frac{\frac{\varphi_k^{i+1,j} + \varphi_k^{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\varphi_k^{i,j+1} + \varphi_k^{i,j-1}}{(\Delta y)^2} - \alpha\varphi_k^{i,j} + \alpha\varphi_{k-1}^{i,j} - g(\varphi_{k-1}^{i,j}) + f(x^i, y^j)}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \alpha}$$

para $2 \leq i \leq N$ e $2 \leq j \leq M$ (106)

$$\begin{aligned} \varphi_k^{N+1,j} &= \varphi_k^{N,j} & \text{para } 2 \leq j \leq M \\ \varphi_k^{1,j} &= \varphi_k^{2,j} & \text{para } 2 \leq j \leq M \\ \varphi_k^{i,M+1} &= \varphi_k^{i,M} & \text{para } 2 \leq i \leq N \\ \varphi_k^{i,1} &= \varphi_k^{i,2} & \text{para } 2 \leq i \leq N \end{aligned}$$

que é uma forma já adequada para a implementação computacional de um esquema iterativo de Gauss-Seidel.

Para facilitar a implementação computacional, vamos representar a função $f(x, y)$ da seguinte maneira

$$f(x, y) = C_1 \left(\left(\frac{x-x_0}{H} \right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{H} \right)^2 + 1 \right)^{-3/2} + C_2 \quad (107)$$

Alguns resultados numéricos são apresentados nas figuras a seguir.

As figuras 7-13 ilustram o processo de convergência a partir de 12 elementos selecionados da seqüência.

As figuras 7 e 8 apresentam uma comparação entre dois valores diferentes da constante α , para ilustrar a velocidade de convergência e a independência do limite. Em ambos os casos empregou-se 441 nós.

A figura 9 apresenta a mesma simulação da figura 7 (com o mesmo α) só que com 2601 nós. Nota-se que o valor máximo é ligeiramente maior.

As figuras 10 e 11 consideram uma fonte centralizada com grande concentração (a fonte está próxima à placa) e uma comparação entre resultados obtidos com 441 nós e com 2601 nós.

As figuras 12 e 13 apresentam a mesma comparação das figuras 10 e 11, só que com a fonte posicionada na borda da placa.

Foram empregados 2501 elementos da seqüência a título de ilustração. Normalmente, com uma boa escolha para α , bastam 10 elementos...

A figura 7 ilustra a Condição A, com a função φ_k para 12 valores selecionados de k obtidos com $C_1=125,0$, $C_2=0,0$, $L_x=L_y=2,0$, $H=0,2$, $N=20$ e $M=20$ para uma fonte localizada acima do ponto $(0,0)$, empregando $\alpha=20,0$.

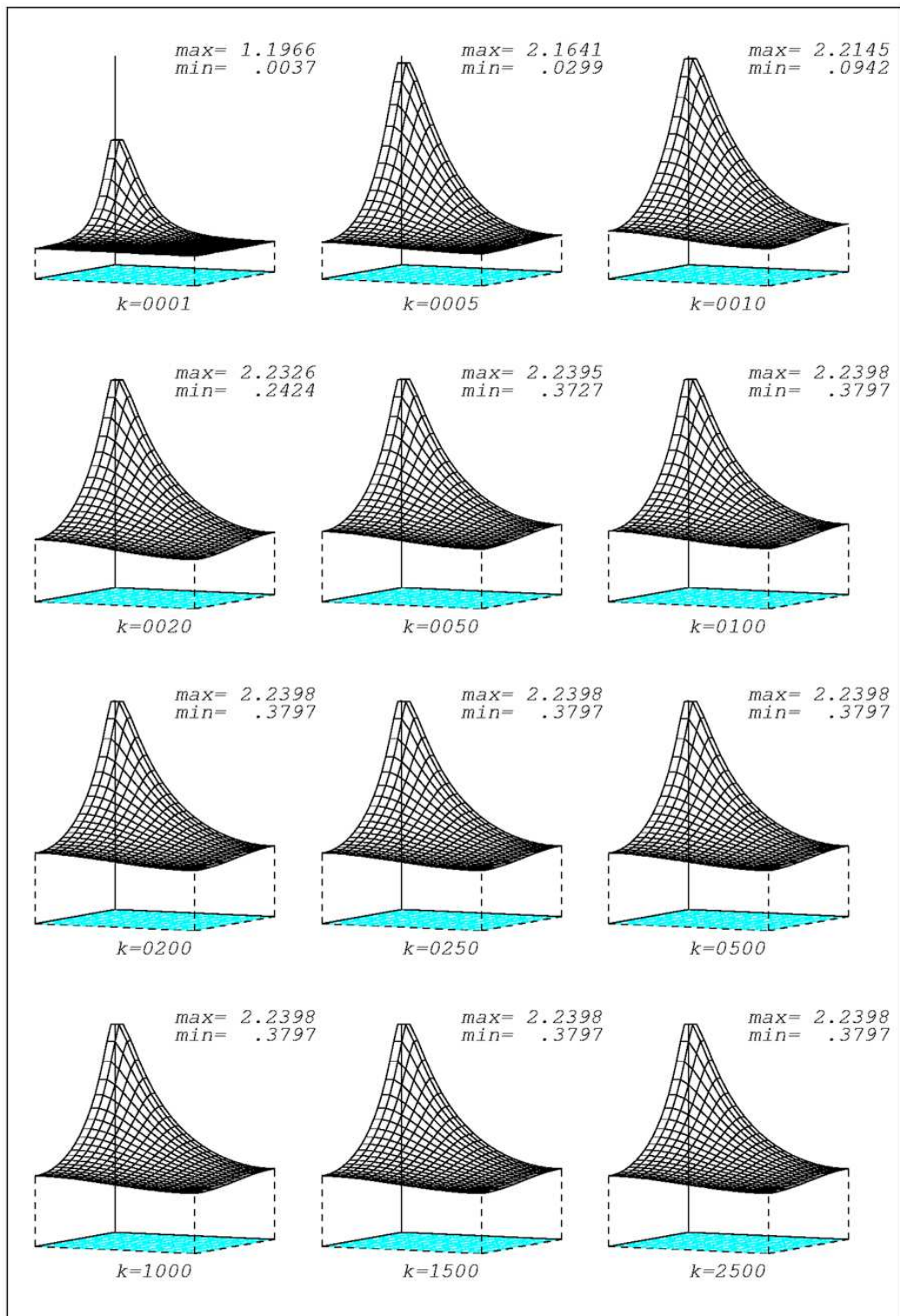


Figura 7 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição A

A figura 8 ilustra a Condição B com a função φ_k para 12 valores seleccionados de k obtidos com $C_1 = 125,0$, $C_2 = 0,0$, $L_x = L_y = 2,0$, $H = 0,2$, $N = 20$ e $M = 20$ para uma fonte localizada acima do ponto $(0,0)$, empregando $\alpha = 100,0$.

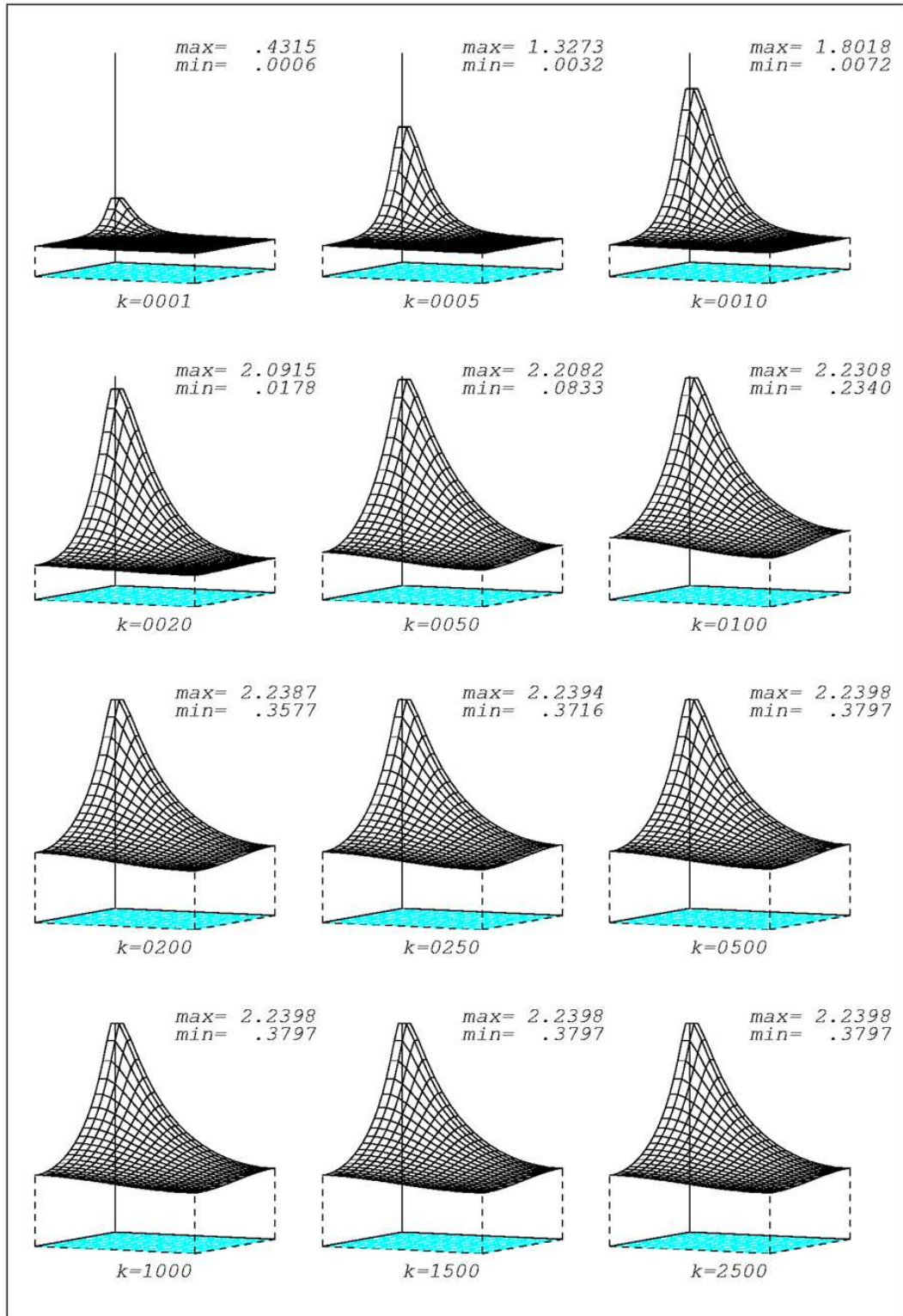


Figura 8 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição B

A figura 9 ilustra a Condição C com a função φ_k para 12 valores seleccionados de k obtidos com $C_1 = 125,0$, $C_2 = 0,0$, $L_x = L_y = 2,0$, $H = 0,2$, $N = 50$ e $M = 50$ para uma fonte localizada acima do ponto $(0,0)$, empregando $\alpha = 20,0$.

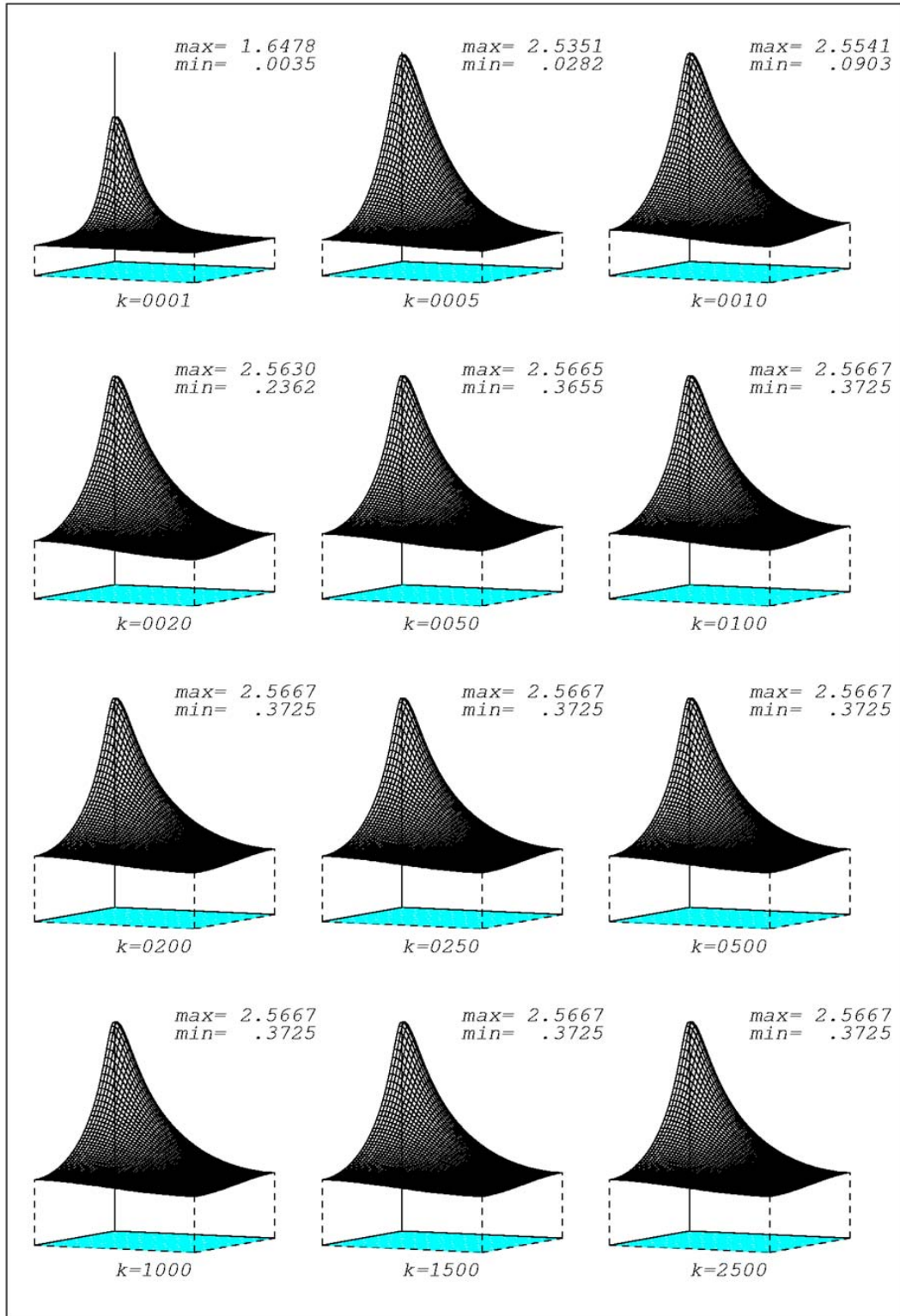


Figura 9 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição C

A figura 10 ilustra a Condição D com a função φ_k para 12 valores seleccionados de k obtidos com $C_1=8000,0$, $C_2=0,0$, $L_x=L_y=2,0$, $H=0,05$, $N=20$ e $M=20$ para uma fonte localizada acima do ponto (1,1), empregando $\alpha=2000,0$.

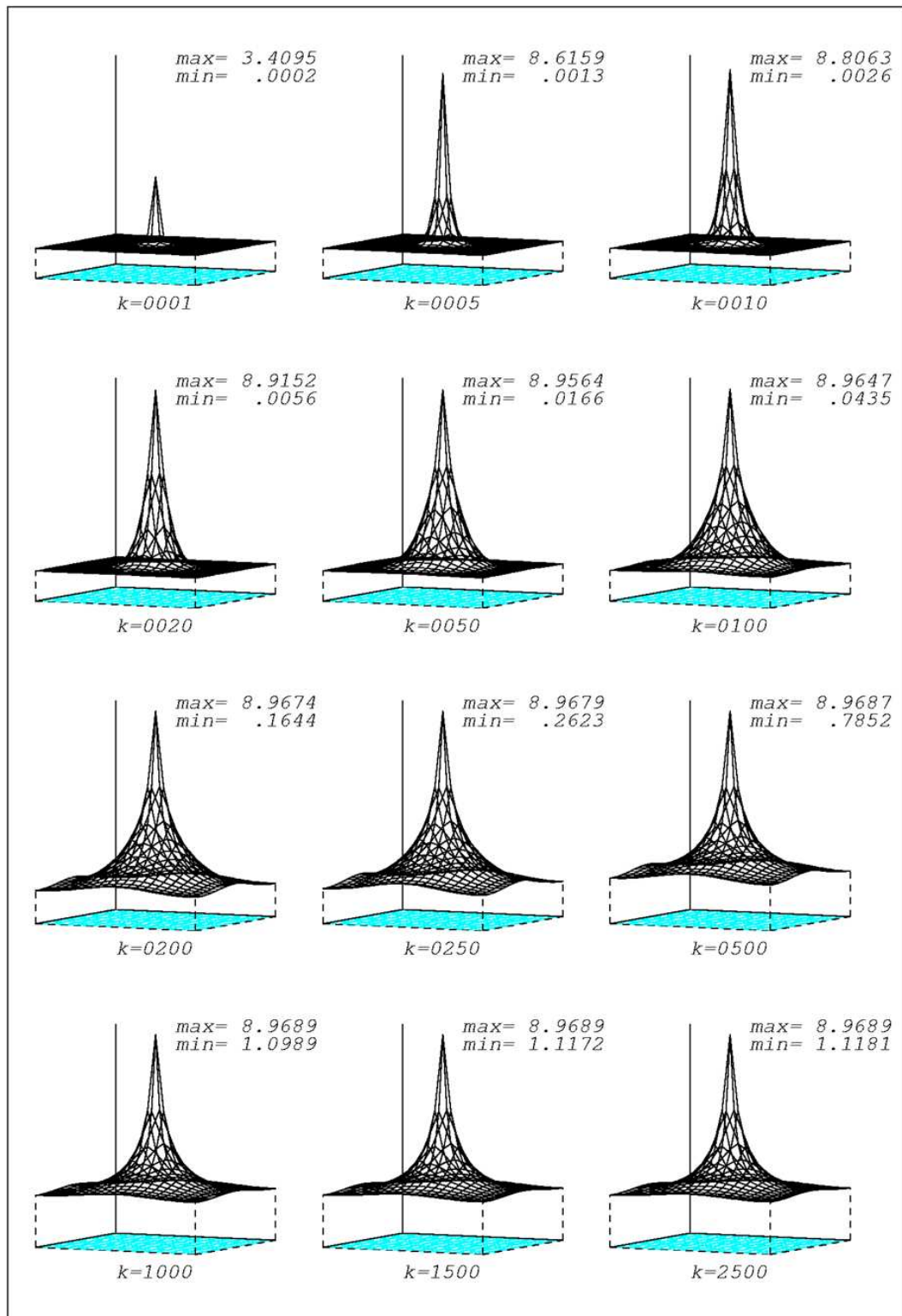


Figura 10 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição D

A figura 11 ilustra a Condição E com a função φ_k para 12 valores seleccionados de k obtidos com $C_1=8000,0$, $C_2=0,0$, $L_x=L_y=2,0$, $H=0,05$, $N=50$ e $M=50$ para uma fonte localizada acima do ponto (1,1), empregando $\alpha=2000,0$.

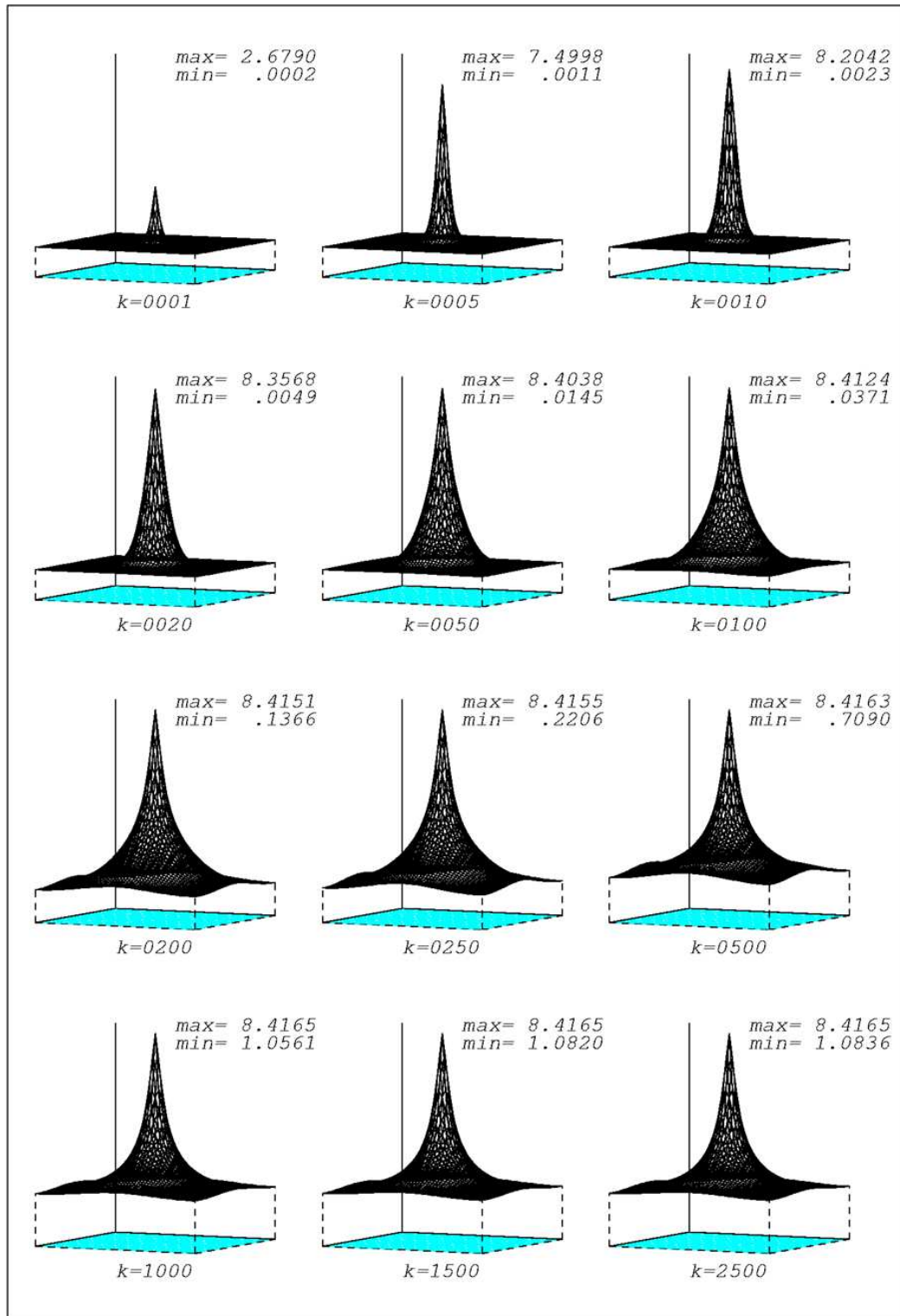


Figura 11 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição E

A figura 12 ilustra a Condição F com a função φ_k para 12 valores seleccionados de k obtidos com $C_1=8000,0$, $C_2=0,0$, $L_x=L_y=2,0$, $H=0,05$, $N=20$ e $M=20$ para uma fonte localizada acima do ponto $(0,5,2)$, empregando $\alpha=2000,0$.

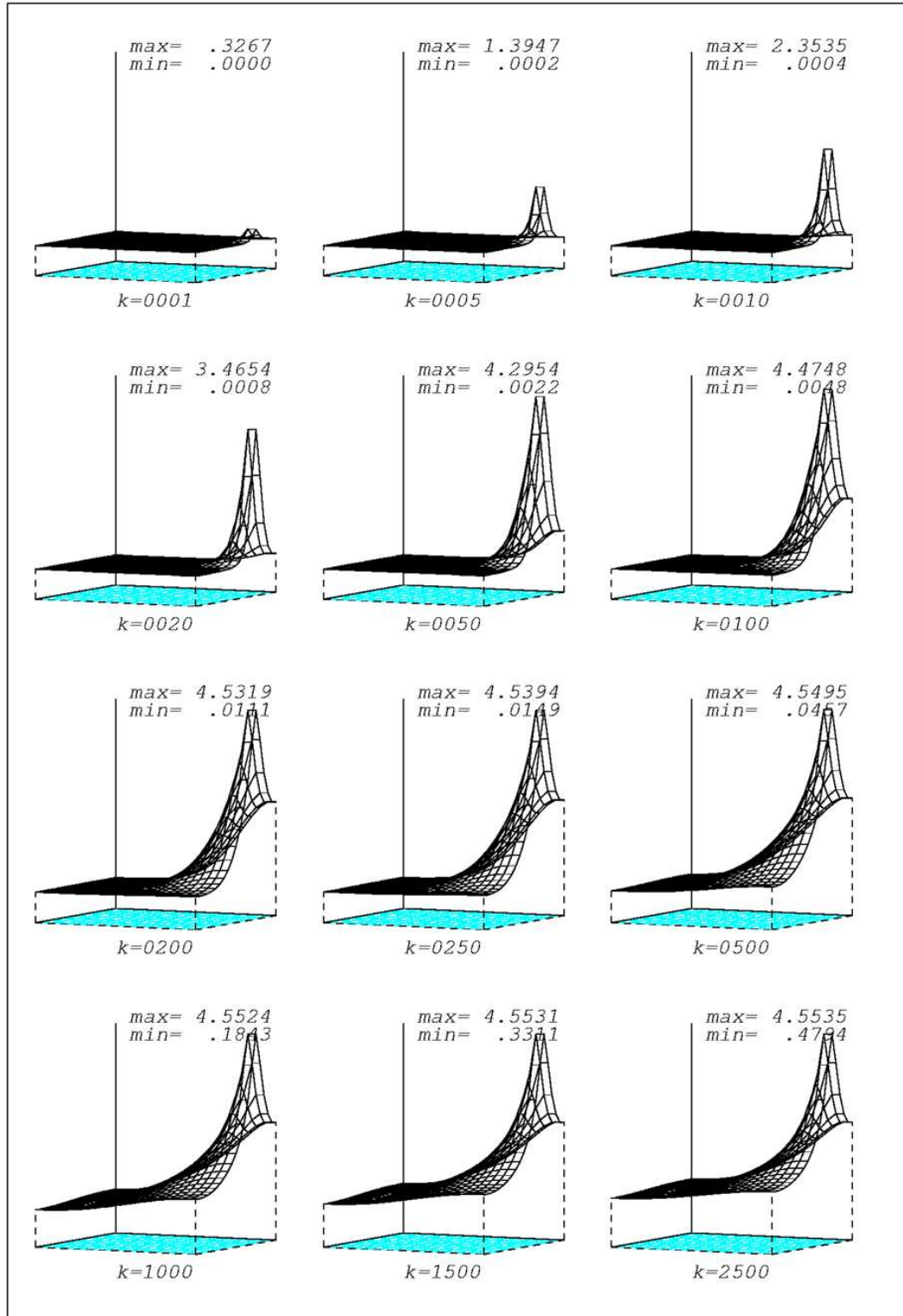


Figura 12 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição F

A figura 13 ilustra a Condição G com a função φ_k para 12 valores seleccionados de k obtidos com $C_1=8000,0$, $C_2=0,0$, $L_x=L_y=2,0$, $H=0,05$, $N=50$ e $M=50$ para uma fonte localizada acima do ponto $(0,5,2)$, empregando $\alpha=2000,0$.

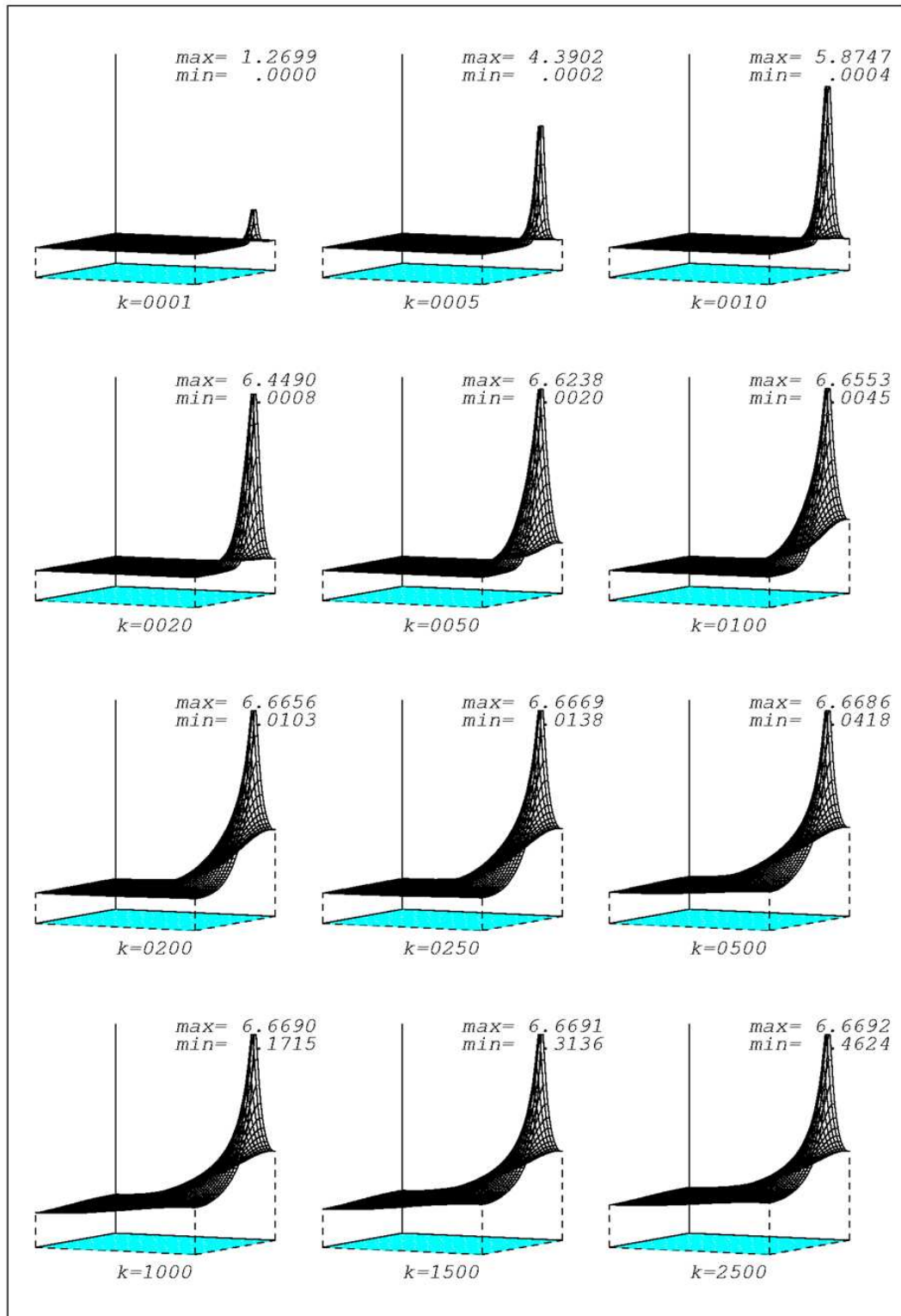


Figura 13 – A função φ_k para 12 valores de k obtida na Condição G

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou um resultado original (inédito) que permitiu a construção da solução exata de uma equação diferencial parcial não linear a partir de uma seqüência de problemas lineares (equações diferenciais parciais lineares) além de uma modelagem matemática para o processo de aquecimento de um corpo exposto a uma fonte puntual de radiação térmica difusa.

O esquema empregado para a construção da solução exata foi empregado com sucesso, em dimensão finita, para a simulação numérica em diferenças finitas do problema original.

Diversos trabalhos surgem como continuação natural deste. No entanto, nenhum é tão iminente quanto o que considera a existência de N fontes puntuais. Dentre as continuações previstas, temos as formulações variacionais e as situações envolvendo descrições tridimensionais.

REFERÊNCIAS

- [1] ARPACI, V.S. Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1966.
- [2] GAMA, R.M.S. A linear scheme for simulating conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions. Applied Mathematical Modelling, vol.21, pp.447-454, Julho, 1997.
- [3] GAMA, R.M.S. Análise da troca de calor por radiação térmica difusa em uma cavidade cinzenta trapezoidal. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, vol.VIII, no.1, pp.31-43, 1986.
- [4] GAMA, R.M.S. An a priori upper bound estimate for the steady-state temperature distribution in a body subjected to linear boundary conditions. Mechanics Research Communications, vol.27, no.2, pp.229-234, 2000.
- [5] GAMA, R.M.S. A new mathematical model for energy transfer problems with radiative boundary conditions. Applied Mathematical Modelling, no.2, vol.14, pp.96-103, 1990.
- [6] GAMA, R.M.S. A note on the solutions of thermal radiant energy interchange problems. Journal of Heat Transfer (ASME), vol.110, no.4A, pp.1014-1016, 1988.
- [7] GAMA, R.M.S. An upper bound estimate for a class of conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions. Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol.27, no.7, pp.955- 964, 2000.
- [8] GAMA, R.M.S. Aplicação do método das cordas cruzadas na solução local de problemas simétricos de radiação pura. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, vol.VI, no.3, pp.199-210, 1984.

- [9] GAMA, R.M.S. Existence, uniqueness and construction of the solution of the energy transfer problem in a rigid and non-convex black body. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, vol.42, pp.334-347, 1991.
- [10] GAMA, R.M.S. Numerical simulation of the (nonlinear) conduction/radiation heat transfer process in a nonconvex and black cylindrical body. *Journal of Computational Physics*, vol.128, pp.341-350, 1996.
- [11] GAMA, R.M.S. On a class of elliptic problems and its application to heat transfer in nonconvex bodies. *Journal of Computational Mathematics*, vol.11, no.4, pp.301-312, 1993.
- [12] GAMA, R.M.S. On the heat transfer phenomenon in a spherical body surrounded by vacuum, with temperature-dependent heat generation. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, vol.XIII, no.2, pp.151-166, 1991.
- [13] GAMA, R.M.S. On the physical solutions to the heat equation subjected to nonlinear boundary conditions. *Journal of Computational Mathematics*, vol.10, Suppl. Iss., pp.15-21, 1992.
- [14] GAMA, R.M.S. On the solutions of the energy transfer problem in a nonconvex black body with convective/radiative boundary conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol.26, no.5, pp.641-653, 1991.
- [15] GAMA, R.M.S. Simulation of the steady-state energy transfer in rigid bodies, with convective/radiative boundary conditions, employing a minimum principle. *Journal of Computational Physics*, vol.99, no.2, pp.310-320, 1992.
- [16] GAMA, R.M.S. The nonlinear conduction/radiation heat transfer phenomenon represented as the limit of a sequence of linear problems. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol.24, no.1, pp.119-128, 1997.
- [17] GAMA, R.M.S. Uma formulação variacional geral para problemas de troca de

calor por radiação difusa. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, vol.VII, no.2, pp.163-179, 1985.

- [18] INCROPERA, F; DEWITT P.D., Introduction to Heat Transfer, 3rd edition, John Wiley&Sons, Inc., 1996.
- [19] KREYSZIG, E. Introductory to Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [20] SPARROW, E.M.; CESS, R.D. Radiation Heat Transfer, McGraw-Hill, Washington, 1978.
- [21] SLATTERY, J.C. Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1972.
- [22] TAYLOR, A.E. Introduction to functional analysis, Wiley Toppan, Tokyo, 1958.