



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciência

Faculdade de Engenharia

Eduardo Dias Corrêa

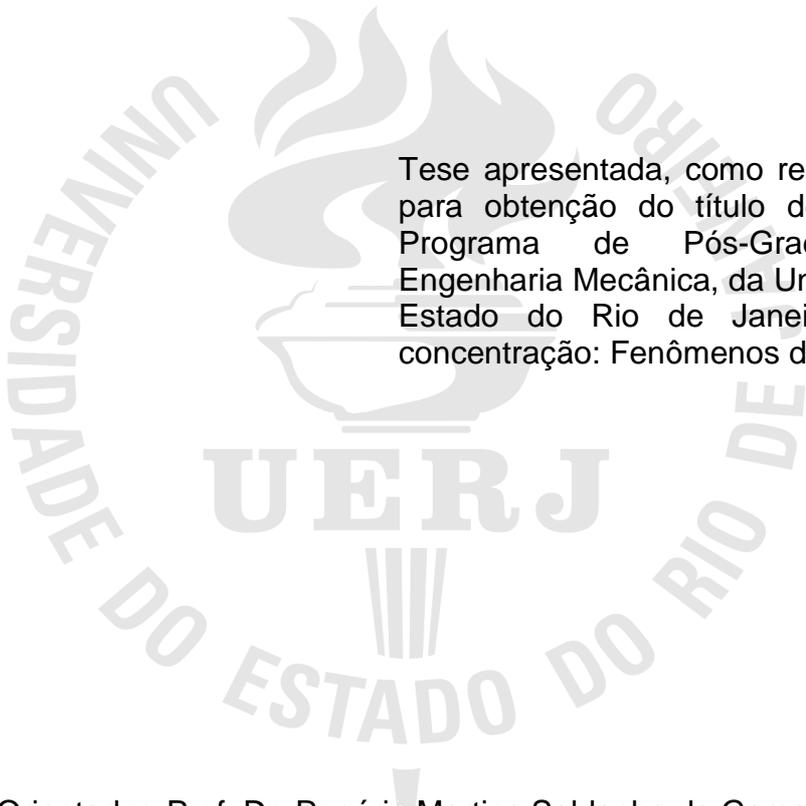
Estimativas a priori para problemas não lineares de condução de calor, com o uso da Transformada de Kirchhoff

Rio de Janeiro

2014

Eduardo Dias Corrêa

Estimativas a priori para problemas não lineares de condução de calor, com o uso da Transformada de Kirchhoff



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama

Coorientador: Prof. Dr. Luiz Mariano Paes de Carvalho

Rio de Janeiro

2014

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

C824 Corrêa, Eduardo Dias.
Estimativas a priori para problemas não lineares de condução de calor, com o uso da Transformada de Kirchhoff / Eduardo Dias Corrêa. - 2014.
73 f.

Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama.
Coorientador: Luiz Mariano Paes de Carvalho.
Tese (Doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Mecânica. 2. Calor - Condução - Teses. 3. Calor - Transmissão - Teses. I. Gama, Rogério Martins Saldanha da. II. Carvalho, Luiz Mariano Paes de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. IV. Título.

CDU 621.1.016.4:536.2

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Eduardo Dias Corrêa

Estimativas a priori para problemas não lineares de condução de calor, com o uso da Transformada de Kirchhoff

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Aprovado em: 29 de abril de 2014.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama (Orientador)
Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. Luiz Mariano Paes de Carvalho (Coorientador)
Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. Carlos Antônio de Moura
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Heraldo Silva da Costa Mattos
Faculdade de Engenharia - UFF

Prof. Dr. Felipe Bastos de Freitas Rachid
Faculdade de Engenharia – UFF

Prof^a. Dr^a. Maria Laura Martins Costa
Faculdade de Engenharia - UFF

Rio de Janeiro

2014

DEDICATÓRIA

À Deus e à minha família.

AGRADECIMENTOS

À toda minha família, especialmente ao meu filho João e à Débora.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UERJ, e seus professores e funcionários.

Ao meu orientador Rogério Saldanha da Gama e coorientador Luiz mariano Paes de Carvalho, pela dedicação, incentivo, troca e confiança. Sem os quais não seria possível a realização deste trabalho.

Aos companheiros e amigos da pós-graduação que me acompanharam em diversos momentos. Em especial, Wagner Fortes, Gustavo Rabello, Gustavo Peixoto e José Júlio.

Aos colegas professores da UERJ que sempre me incentivaram, especialmente Prof. Humberto do Nascimento.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta tese, muito obrigado.

RESUMO

CORRÊA, Eduardo Dias. *Estimativas a priori para problemas não lineares de condução de calor, com o uso da transformada de Kirchoff*. 2014. 74f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Este trabalho apresenta uma estimativa a priori para o limite superior da distribuição de temperatura considerando um problema em regime permanente em um corpo com uma condutividade térmica dependente da temperatura. A discussão é realizada supondo que as condições de contorno são lineares (lei de Newton do resfriamento) e que a condutividade térmica é constante por partes (quando considerada como uma função da temperatura). Estas estimativas consistem em uma ferramenta poderosa que pode prescindir da necessidade de uma simulação numérica cara de um problema de transferência de calor não linear, sempre que for suficiente conhecer o valor mais alto de temperatura. Nestes casos, a metodologia proposta neste trabalho é mais eficaz do que as aproximações usuais que assumem tanto a condutividade térmica quanto as fontes de calor como constantes.

Palavras-chave: Condução de calor não-linear; Condutividade térmica dependente da temperatura; Estimativa para o limite superior.

ABSTRACT

CORRÊA, EDUARDO DIAS. *A priori estimates for nonlinear problems of heat conduction with the use of Kirchhoff transform*. 2014. 74f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

This article presents an a priori upper bound estimate for the steady-state temperature distribution in a body with a temperature-dependent thermal conductivity. The discussion is carried out assuming linear boundary conditions (Newton law of cooling) and a piecewise constant thermal conductivity (when regarded as a function of the temperature). These estimates consist of a powerful tool that may circumvent an expensive numerical simulation of a nonlinear heat transfer problem, whenever it suffices to know the highest temperature value. In these cases the methodology proposed in this work is more effective than the usual approximations that assume thermal conductivities and heat sources as constants.

Keywords: Nonlinear heat conduction; Temperature-dependent thermal conductivity; Upper bound estimate.

LISTA DE SÍMBOLOS

\inf	denota o ínfimo
\max	denota o máximo
\sup	denota o supremo
$\hat{f}(T)$	transformada de Kirchhoff
$\hat{f}^{-1}(\omega)$	inversa da transformada de Kirchhoff
h	coeficiente de transferência de calor por convecção
k	condutividade térmica
\mathbf{n}	normal unitária exterior
\dot{q}	fonte interna de calor
\mathbf{q}	fluxo de calor
R	raio
r	variável radial
T	temperatura
T_0	temperatura de referência
T_∞	temperatura do ambiente
Γ	região espacial
$\partial\Gamma$	fronteira de Γ
Ω	região espacial
$\partial\Omega$	fronteira de Ω
$\partial\Omega^+$	subconjunto de $\partial\Omega$
Ω^*	região espacial contendo Ω
ω	função obtida a partir da transformada de Kirchhoff

SUMÁRIO

1	MOTIVAÇÃO E APRESENTAÇÃO DO TRABALHO	9
2	MODELO MECÂNICO	13
2.1	Equações de Balanço	14
2.1.1	<u>Balanço de Massa</u>	14
2.1.2	<u>Princípio de Conservação de Energia</u>	16
2.1.3	<u>Segunda Lei da Termodinâmica</u>	18
2.1.4	<u>Lei de Fourier</u>	19
2.1.5	<u>Modelo Matemático</u>	20
3	A TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF	21
3.1	Condutividade Térmica Constante Por Partes	21
3.2	Condutividade Térmica com Dependência Linear na Temperatura	23
4	ALGUNS RESULTADOS E DISCUSSÕES	26
4.1	Condutividade Térmica Constante Por Partes – Estimativa de Limite Superior para a Temperatura	26
4.1.1	<u>Estimativa de Limite Superior para a Temperatura – As escolhas de ψ</u>	33
4.1.2	<u>Estimativa de Limite Superior para a Temperatura – Um exemplo – Problema com simetria esférica</u>	35
4.2	Condutividade Térmica com Dependência Linear na Temperatura – Estimativa de Limite Superior para a Temperatura	38
4.2.1	<u>Estimativa de Limite Superior para a Temperatura – As escolhas de ψ</u>	43
4.2.2	<u>Estimativa de Limite Superior para a Temperatura – Um exemplo – Problema com simetria esférica</u>	45
5	UMA SIMULAÇÃO NUMÉRICA POR ELEMENTOS FINITOS	51
5.1	Solução do Caso Específico	55
	CONCLUSÕES	60
	REFERÊNCIAS	62
	APÊNDICE A – Prova de Convexidade e Coercividade	64
	APÊNDICE B – Simulação – código (m-file)	67

1 Motivação e Apresentação do Trabalho

Problemas de transferência de calor por condução são geralmente simuladas supondo que a condutividade térmica seja independente da temperatura. Essa aproximação permite uma grande simplificação da simulação dos problemas considerados. No entanto, a condutividade térmica dependente da temperatura está presente em muitos problemas com grande relevância em engenharia. Alguns exemplos de grande relevância podem ser citados, nos quais esta dependência não pode ser desprezada. Considerando-se nanotubos de carbono (conhecidos por sua alta condutividade térmica), a condutividade térmica dependente da temperatura das cordas cristalinas de nanotubos de carbono de parede simples decresce suavemente com a diminuição da temperatura, exibindo uma temperatura dependência linear da temperatura abaixo de 30 K (Hone et al. , 1999). Osman & Srivastava (2001) analisaram a condutividade térmica dependente da temperatura de nanotubos de carbono de parede simples, observando um pico no comportamento da condutividade térmica como uma função de temperatura, antes de cair para temperaturas mais elevadas, usando simulações de dinâmica molecular com o potencial ordem de ligação de Tersoff-Brenner. Zain-ul-Abdein et al. (2012) estudaram a condutividade térmica em um compósito preenchido por partículas, verificando a sua dependência em relação ao tamanho das partículas, o que, por sua vez, depende da temperatura .

Kim (2001) propôs um método direto para estimar a condutividade térmica dependente da temperatura, utilizando a transformada de Kirchhoff, que transforma a equação de condução de calor não linear em regime permanente, sem fonte de calor na equação de Laplace. A condutividade térmica, expressa como uma combinação linear de funções conhecidas com coeficientes desconhecidos, é determinada a partir do fluxo

de calor aplicado e as temperaturas (medidas) nos limites. Okoya & Ajadi (1999) estudaram a estabilidade térmica considerando a condutividade térmica como funções exponenciais e de leis de potência (*power-law*) de temperatura, a fim de definir as condições para a explosão, ou seja, como a explosão é afetada por condições de contorno e como o parâmetro crítico é afetado por uma determinada constante. Moitsheki et al. (2010) apresentam soluções exatas de um problema de aletas não-linear quando tanto a condutividade térmica quanto o coeficiente de transferência de calor são funções de leis de potência (*power-law*) da temperatura, empregando técnicas de simetria clássicas de Lie.

A condutividade térmica dependente da temperatura desempenha um papel importante em materiais como silício poroso, especialmente em relação às suas aplicações na optoeletrônica. Geseley et al. (1997) verificaram que a condutibilidade térmica aumenta com o aumento da temperatura. Outro material importante que apresenta aplicações interesse de em optoeletrônicos e eletrônicos é o óxido de zinco. A condutividade térmica máxima de óxido de zinco policristalino ocorre a cerca de 60 K e os seus valores são quase uma ordem de grandeza menor do que a condutividade térmica média do ZnO (Alvarez-Quintana et al., 2010).

No entanto, mesmo tendo em conta a dependência da condutividade térmica da temperatura, é possível estimar a priori um limite superior para o campo de temperaturas, sem a necessidade de realizar uma simulação completa do processo de transferência de calor por condução. Algumas vezes, a simulação de um problema de transferência de calor não linear complexo é realizada apenas para verificar se a temperatura máxima se mantém inferior a um dado valor. Em tais casos, a simulação torna-se desnecessária se uma estimativa do limite superior para a solução estiver disponível. Em particular, a condutividade térmica pode ser aproximada por uma função

constante por partes da temperatura como se segue: $k = k_1 = \text{constante}$ para $T_0 < T$ ou $k = k_2 = \text{constante}$ para $T_0 \geq T$, onde T_0 é uma constante, a estimativa do limite superior torna-se particularmente fácil de ser obtida. Esta hipótese representa uma primeira aproximação para problemas com a condutividade térmica depende da temperatura. A segunda hipótese a ser considerada para a condutividade térmica será uma dependência linear da temperatura: $k = (1 + \beta T)k_0$, sendo $k_0 > 0$ e β constantes.

O principal objetivo deste trabalho é fornecer estimativas a priori do limite superior para a distribuição de temperaturas em corpos homogêneos com condutividade térmica dependente da temperatura representada por funções constantes por partes, e funções onde a condutividade térmica apresenta uma dependência linear da temperatura, submetidos a uma condição de contorno linear (lei de resfriamento de Newton).

Estas estimativas a priori podem ser úteis, por exemplo, quando o objetivo principal é o de assegurar que uma temperatura (máxima admissível) nunca será atingida. É importante notar que os limites superiores para problemas sujeitos a condições de contorno não lineares (transferência de calor condução / radiação) para a condutividade térmica constante já foram propostos (Saldanha da Gama, 1997; Saldanha da Gama, 2000).

No capítulo 2 é apresentado o modelo mecânico a ser tratado nesta tese. Inicialmente são apresentados os balanços de massa e energia e a segunda lei da termodinâmica, em seguida, a hipótese constitutiva utilizada – a lei de Fourier, e, finalmente os problemas que serão considerados.

No capítulo 3 é discutida a transformada de Kirchhoff, fundamental para atingir as estimativas a priori para o limite superior da distribuição de temperaturas, para os dois casos de $k = \widehat{k}(T)$ considerados.

No capítulo 4 são fornecidas estimativas a priori do limite superior para a distribuição de temperaturas em corpos homogêneos com condutividade térmica dependente da temperatura representadas tanto por funções constantes por partes.

O capítulo 5 descreve o procedimento numérico que permite simular a transferência de energia por convecção forçada na geometria descrita no capítulo 4, além de apresentar alguns resultados numéricos representativos que ilustram a metodologia anteriormente descrita.

Finalmente, no sexto e último capítulo, são apresentadas as principais conclusões obtidas.

2 Modelo Mecânico

Neste trabalho será considerado o ponto de vista clássico da Mecânica do Contínuo (Gurtin, 1981) que descreve adequadamente o comportamento de materiais localmente monofásicos, tais como aço, água, gases ou borracha. O modelo mecânico emprega as equações de balanço, combinadas a hipóteses constitutivas, a fim de representar um problema de condução de calor em um corpo sólido em regime permanente com uma condutividade térmica dependente da temperatura.

2.1 Equações de Balanço

Nos princípios de conservação postulados, considera-se uma parte Υ de um meio contínuo ocupando toda uma região Ω fixa do espaço Euclidiano \mathcal{E} , na configuração atual com volume V , limitada por uma superfície $\partial\Omega$ de área A . Todas as equações são postuladas no instante atual t e todos os campos considerados são funções da posição \mathbf{x} e do tempo t .

2.1.1 Balanço de Massa

Definindo ρ como a densidade de Υ , a massa de um corpo M , ocupando a região Ω num dado instante t pode ser escrita como

$$M = \int_{\Omega} \rho \, dV \quad (2.1)$$

A conservação de massa postula que a massa de um corpo é preservada, ou seja,

$$\frac{d}{dt} M = 0 \quad (2.2)$$

Aplicando o Teorema do Transporte de Reynolds (Slattery, 1999) e denotando por \mathbf{n} a normal exterior à superfície, a conservação de massa é expressa como (Gurtin, 1981)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, dV + \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA = 0 \quad (2.3)$$

onde \mathbf{v} representa a velocidade do meio contínuo.

A forma local da conservação de massa é obtida aplicando-se o Teorema da Divergência a (2.3),

$$\int_{\Omega} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad (2.4)$$

usando o fato de Ω representar uma região espacial fixa e supondo o integrando contínuo na região Ω , obtem-se, finalmente, a forma local

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.5)$$

Esta equação reproduz a conservação de massa para um meio contínuo.

2.1.2 Princípio de Conservação de Energia

Para postular o balanço de energia, denota-se por ε a energia interna específica, por r a geração (externa) de calor por unidade de massa e por \mathbf{q} o vetor fluxo de calor (por unidade de tempo e de área) de tal forma que o fluxo de calor conduzido através da superfície $\partial\Omega$ seja dado por $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$.

O balanço de energia – correspondendo à Primeira Lei da Termodinâmica pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \left[\varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dV + \int_{\partial\Omega} \rho \left[\varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \\ + \int_{\Omega} \rho r + (\rho \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega} [\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}] dA \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $1/2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$ representa a energia cinética por unidade de massa, o termo $\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$ representa a potência das forças externas de corpo por unidade de volume e $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}$ representa a potência das forças de contato por unidade de área. Neste ponto vale a pena comentar que o Teorema de Cauchy afirma que o vetor tração é linear na normal exterior \mathbf{n} , $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}$, onde $\boldsymbol{\sigma}$ representa tensor tensão de Cauchy.

Mais especificamente, a forma das forças de contato pode ser avaliada empregando-se uma analogia com a *hipótese de Cauchy*, um dos mais importantes axiomas da Mecânica do Contínuo (Gurtin, 1981). Cauchy supôs a existência de uma densidade de força de superfície $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t)$, definida para cada vetor unitário normal exterior \mathbf{n} e cada (\mathbf{x}, t) na trajetória do movimento, dotado da seguinte propriedade:

considerando uma superfície orientada S de um corpo com normal unitária exterior \mathbf{n} em \mathbf{x} , o vetor $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t)$ – denominado vetor tensão – representa a força por unidade de área exercida no interior do corpo, através da superfície S por seu exterior. A resultante da força e de momento da distribuição de vetores tensão é equivalente à resultante das forças materiais exercidas pelo lado exterior de S no seu lado interior – representando a força de contato total exercida num corpo num dado instante. Supõe-se, ainda, que a distribuição \mathbf{t} depende apenas da posição e da orientação do elemento de superfície.

Aplicando um procedimento análogo ao usado na dedução do balanço de massa, obtém-se a forma local da conservação de energia para um meio contínuo

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \quad (2.7)$$

onde o tensor $\mathbf{D} = 1/2 [(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T]$ representa a parte simétrica do gradiente de velocidade do i -ésimo constituinte. Além disso, ε denota a energia interna específica, r a geração (externa) de calor por unidade de massa, \mathbf{q} o vetor fluxo de calor (por unidade de tempo e de área), e $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}$ a dissipação viscosa.

2.1.3 Segunda Lei da Termodinâmica

A expressão da Segunda Lei da Termodinâmica, além de alguns temas como a noção básica de entropia, sua definição como grandeza primitiva ou derivada e o significado da temperatura ainda são objeto de debate entre diversos autores. No presente trabalho supõe-se a Segunda Lei da Termodinâmica dada pela desigualdade de Clausius-Duhem.

Ao meio contínuo associa-se uma temperatura absoluta T (por hipótese positiva) e uma entropia específica s de forma a ter-se a entropia total, S , ocupando a região $\Omega_t \equiv \Omega$ num dado instante t dada por

$$S = \int_{\Omega} \rho s \, dV \quad (2.8)$$

A desigualdade de produção de entropia é postulada, supondo que o fluxo de entropia devido ao fluxo de calor, \mathbf{q} , seja dado por \mathbf{q}/T e que a geração de entropia devido à presença do termo de geração externa de energia, r , seja r/T , como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho s \, dV + \int_{\partial\Omega} \rho s \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA \geq \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} \, dA + \int_{\Omega} \frac{\rho r}{T} \, dV \quad (2.9)$$

Sua forma local é dada por

$$\left[\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \right] \geq 0 \quad (2.10)$$

2.1.4 Lei de Fourier

Neste trabalho, o vetor fluxo de calor será considerado para um meio contínuo isotrópico a uma temperatura T , com condutividade térmica $k = \hat{k}(T)$, sendo verificada a hipótese clássica de Fourier, ou seja, o fluxo de calor, \mathbf{q} , é tal que

$$\mathbf{q} = -k(T) \nabla T \quad (2.11)$$

Uma observação relevante, que motivou a apresentação da segunda lei da termodinâmica no item anterior, é sua importância para garantir equações constitutivas termodinamicamente consistentes. O sinal negativo que surge no segundo membro da lei de Fourier garante que o fluxo de calor sempre ocorra do meio com maior temperatura para o meio com menor temperatura, obedecendo a segunda lei da termodinâmica.

Neste trabalho serão supostas diferentes funções para a condutividade térmica. Inicialmente, será suposta uma função constante por partes e, em seguida uma função não linear da temperatura. Nestes dois problemas serão apresentadas estimativas a priori para o limite superior da distribuição de temperaturas.

2.1.5 Modelo Matemático

O processo clássico de transferência de calor por condução em regime permanente em um corpo rígido e opaco em repouso, representado pelo conjunto aberto limitado Ω com fronteira $\partial\Omega$, sujeito a uma condição de contorno linear é descrito matematicamente por (Slattery, 1999; Incropera & Dewitt, 1996)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[k \operatorname{grad} T] + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= h(T - T_{\infty}) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde \mathbf{n} representa a normal exterior unitária, \dot{q} é a geração interna de calor (por unidade de tempo e de volume), k é a condutividade térmica, T_{∞} é a temperatura do ambiente – suposta constante, h é o coeficiente de transferência de calor por convecção – suposto constante e sempre positivo e T é a temperatura (desconhecida). É importante observar que no problema definido pela equação (2.12) a geração de calor \dot{q} é uma função dada. E a condutividade k é uma função escalar de valor sempre positivo, da temperatura. Em outras palavras, $k = \hat{k}(T)$. Ao longo deste trabalho serão consideradas duas hipóteses para a dependência da condutividade térmica na temperatura: constante por partes e uma função linear da temperatura.

3 A Transformada de Kirchhoff

A Transformada de Kirchhoff pode ser definida em termos de uma variável ω – uma função obtida a partir da transformada de Kirchhoff – como (Arpaci, 1966)

$$\omega = \hat{f}(T) = \int_{T_0}^T \hat{k}(\xi) d\xi \quad (3.1)$$

Levando a

$$\text{grad } \omega = k \text{ grad } T \quad (3.2)$$

O emprego da transformada de Kirchhoff permite trabalhar com a seguinte equação diferencial parcial

$$\text{div}(\text{grad } \omega) + \dot{q} = 0 \text{ em } \Omega \quad (3.4)$$

A transformada de Kirchhoff tem como grande vantagem a simplificação de problemas nos quais a condutividade térmica é função da temperatura, no entanto requer procedimentos mais cuidadosos para lidar com as condições de contorno.

3.1. Condutividade Térmica Constante Por Partes

O primeiro caso a ser considerado na presente tese supõe a condutividade térmica aproximada por uma função constante por partes da temperatura como se segue

$$k = \begin{cases} k_1 = \text{constante} & \text{para } T_0 < T \\ k_2 = \text{constante} & \text{para } T_0 \geq T \end{cases} \quad (3.5)$$

onde T_0 é uma constante, a estimativa do limite superior torna-se particularmente fácil de ser obtida. A equação (3.5) representa uma primeira aproximação para problemas com a condutividade térmica depende da temperatura.

Neste caso, a transformada de Kirchhoff pode ser escrita como

$$\omega = \hat{f}(T) = \int_{T_0}^T \hat{k}(\xi) d\xi = (T - T_0) \frac{(k_2 + k_1)}{2} + |T - T_0| \frac{(k_1 - k_2)}{2} \quad (3.6)$$

A inversa da transformada de Kirchhoff definida na equação (3.4) pode ser facilmente obtida como

$$T = \hat{f}^{-1}(\omega) = T_0 + \omega \left[\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |\omega| \left[\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] \quad (3.7)$$

Neste caso, a condição de contorno, imposta na equação (2.12) como $-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = h(T - T_\infty)$ sobre $\partial\Omega$, torna-se

$$-(grad \omega) \cdot \mathbf{n} = h \left(T_0 - T_\infty + \omega \left[\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |\omega| \left[\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] \right) \text{ sobre } \partial\Omega \quad (3.8)$$

A positividade da condutividade térmica assegura que ω é uma função crescente da temperatura T , enquanto T é uma função crescente de ω .

3.2. Condutividade Térmica com Dependência Linear na Temperatura

Neste caso a condutividade térmica depende linearmente da temperatura obedecendo à seguinte equação

$$k = (1 + \beta T) k_0, \quad \text{com } k_0 > 0 \quad (3.9)$$

onde k_0 e β são constantes.

A equação (3.9) representa uma primeira aproximação para problemas com dependência linear da condutividade térmica na temperatura e só faz sentido se, e somente se, $1 + \beta T > 0$ em todo o domínio (Incropera and Dewitt, 1996).

Por conveniência, a fim de lidar-se com uma descrição sem restrições, a equação (3.9), que expressa a dependência linear da condutividade térmica na temperatura, é substituída pela seguinte equação

$$k = \bar{k} + \gamma |T - T_{REF}|, \quad \text{com } \bar{k} > 0 \text{ e } \gamma > 0 \quad (3.10)$$

onde \bar{k} é uma constante positiva, T_{REF} uma temperatura de referência, γ é uma constante positiva e “ $|$ ” denota o “valor absoluto de”. É fácil notar que quando a condutividade térmica k é dada pela equação (3.10) ela será sempre positiva. Como em qualquer problema real de transferência de calor a temperatura é considerada numa dada faixa, a equação (3.10) pode representar a equação (3.9) em qualquer situação real. Como exemplos pode-se considerar as situações (A) e (B) definidas a seguir

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad k &= (1 + \beta T) k_0, \quad \text{com } \beta < 0 \text{ e } k_0 > 0, \quad \text{para } T_1 < T < T_2 \\ \text{(B)} \quad k &= (1 + \beta T) k_0, \quad \text{com } \beta > 0 \text{ e } k_0 > 0, \quad \text{para } T_1 < T < T_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nestas situações particulares a equação (3.9) será representada pela equação (3.10), levando em conta que k tem que ser positivo em todo o domínio, para $T_1 < T < T_2$, desde que

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad k &= \bar{k} + \gamma |T - T_2|, \quad \text{com } \gamma = -\beta k_0 \text{ e } \bar{k} = k_0(1 + \beta T_2) \quad \text{para } T_1 < T < T_2 \\ \text{(B)} \quad k &= \bar{k} + \gamma |T - T_1|, \quad \text{com } \gamma = \beta k_0 \text{ e } \bar{k} = k_0(1 + \beta T_1) \quad \text{para } T_1 < T < T_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Finalmente, pode-se escrever a transformada de Kirchoff correspondente à equação (3.10), e, como já foi mostrado, também à equação (3.9) como:

$$\omega = \hat{f}(T) = \int_{T_{REF}}^T \left[\bar{k} + \gamma |\xi - T_{REF}| \right] d\xi = \bar{k} (T - T_{REF}) + \frac{\gamma}{2} (T - T_{REF}) |T - T_{REF}| \quad (3.13)$$

A inversa da transformada de Kirchhoff, definida na equação (3.4), pode ser facilmente obtida como

$$T = \hat{f}^{-1}(\omega) = \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{\omega + |\omega|}{\gamma}} - \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{|\omega| - \omega}{\gamma}} + T_{REF} \quad (3.14)$$

Neste caso, a condição de contorno, imposta na equação (2.12) como $-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = h(T - T_\infty)$ sobre $\partial\Omega$, torna-se

$$-(\text{grad } \omega) \cdot \mathbf{n} = h \left(\sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{\omega + |\omega|}{\gamma}} - \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{|\omega| - \omega}{\gamma}} + T_{REF} - T_\infty \right) \quad (3.15)$$

sobre $\partial\Omega$

Assim como no caso anterior, a positividade da condutividade térmica assegura que ω é uma função crescente de T , enquanto T é uma função crescente de ω .

4 Alguns Resultados e Discussões

Neste capítulo serão fornecidas estimativas a priori do limite superior para a distribuição de temperaturas em corpos homogêneos com condutividade térmica dependente da temperatura representadas tanto por funções constantes por partes, como por funções lineares, ambos submetidos a condição de contorno linear dada pela lei do resfriamento de Newton.

Estas estimativas a priori podem ser bastante úteis porque não requerem a solução completa (analítica ou numérica) do problema de transferência de calor, que pode ser bastante trabalhosa, todas as vezes que for suficiente garantir que uma dada temperatura (máxima admissível) nunca será atingida.

Assim como no capítulo anterior serão considerados dois problemas. No primeiro a condutividade térmica pode ser aproximada por uma função constante por partes da temperatura como se segue: $k = k_1 = \text{constante}$ para $T_0 < T$ ou $k = k_2 = \text{constante}$ para $T_0 \geq T$, onde T_0 é uma constante. No segundo problema a condutividade térmica depende linearmente da temperatura segundo a função: $k = (1 + \beta T)k_0$, sendo $k_0 > 0$ e β constantes.

4.1. Condutividade Térmica Constante Por Partes – Estimativa de Limite Superior para a Temperatura

Combinando as equações (3.4) e (3.8) – representando a condição de contorno transformada para o problema com condutividade térmica constante por partes, mostrada na equação (3.5), o problema original, representado pela equação (2.12), pode ser representado por

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(\operatorname{grad} \omega) + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega \\ & -(\operatorname{grad} \omega) \cdot \mathbf{n} = h \left(T_0 - T_\infty + \omega \left[\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |\omega| \left[\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] \right) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.1)$$

Neste ponto, define-se o campo Ψ de forma a ter-se

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi) + \sup_{\Omega} [\dot{q}] = 0 \quad (4.2)$$

isto é,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \Psi) + \sup_{\Omega} [\dot{q}] = 0 \quad \text{em } \Omega^*, \quad \text{com } \Omega \subseteq \Omega^* \quad (4.3)$$

no qual Ω^* é um conjunto convenientemente escolhido.

Portanto,

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}[\operatorname{grad}(\omega - \Psi)] \geq 0 \quad \text{em } \Omega \\ & -\operatorname{grad}(\omega - \Psi) \cdot \mathbf{n} = h \left(T_0 - T_\infty + \omega \left[\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |\omega| \left[\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] \right) + \operatorname{grad} \Psi \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.4)$$

Uma vez que

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}(\omega - \Psi)] \geq 0 \quad \text{em } \Gamma \geq 0 \quad (4.5)$$

e empregando o teorema da divergência, para qualquer subconjunto $\Gamma \subseteq \Omega$ com fronteira $\partial\Gamma$, tem-se

$$\int_{\partial\Gamma} \operatorname{grad}(\omega - \Psi) \cdot \mathbf{n} \, dS \geq 0 \quad (4.6)$$

assegurando que o supremum de $(\omega - \Psi)$ em Γ coincide com o supremum de $(\omega - \Psi)$ em $\partial\Gamma$. Além disso, pode-se concluir que

$$\sup_{\Omega}(\omega - \Psi) = \sup_{\partial\Omega}(\omega - \Psi) = \sup_{\partial\Omega^+}(\omega - \Psi) \quad (4.7)$$

onde o subconjunto não vazio $\partial\Omega^+ \subseteq \partial\Omega$ é definido a seguir

$$\partial\Omega^+ \equiv \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ tal que } \operatorname{grad}(\omega - \Psi) \cdot \mathbf{n} \geq 0\} \quad (4.8)$$

A condição de contorno origina a seguinte desigualdade:

$$h\left(T_0 - T_\infty + \omega\left[\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2}\right] + |\omega|\left[\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2}\right]\right) + \text{grad } \Psi \cdot \mathbf{n} \leq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^+ \quad (4.9)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} h\left(T_0 - T_\infty + \omega\left[\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2}\right] + |\omega|\left[\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2}\right]\right) &\leq \sup_{\partial\Omega^+} [(\text{grad } \Psi) \cdot \mathbf{n}] \quad \text{sobre } \partial\Omega^+ \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega\left[\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2}\right] + |\omega|\left[\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2}\right] &\leq T_\infty - T_0 + \frac{1}{h} \left\{ \sup_{\partial\Omega^+} [(\text{grad } \Psi) \cdot \mathbf{n}] \right\} \quad \text{sobre } \partial\Omega^+ \end{aligned} \quad (4.10)$$

A partir da desigualdade acima se pode escrever (Taylor, 1958) a desigualdade a seguir

$$\omega\left[\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2}\right] + |\omega|\left[\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2}\right] \leq T_\infty - T_0 + \frac{1}{h} \left\{ \sup_{\partial\Omega^+} \|\text{grad } \Psi\| \right\} \quad \text{sobre } \partial\Omega^+ \quad (4.11)$$

Então, a partir da equação (3.7), que define a inversa da transformada de Kirchhoff, pode-se concluir que

$$T \leq T_\infty + \frac{1}{h} \left\{ \sup_{\partial\Omega^+} \|\text{grad } \Psi\| \right\} \quad \text{sobre } \partial\Omega^+ \quad (4.12)$$

que representa um limite superior para T sobre a superfície $\partial\Omega^+$. Portanto,

$$\sup_{\partial\Omega^+}[\omega] \leq \int_{T_0}^{T^+} k \, dT \quad (4.13)$$

onde a temperatura T^+ é definida como

$$T^+ = T_\infty + \frac{1}{h} \left\{ \sup_{\partial\Omega^+} \|\text{grad } \Psi\| \right\} \quad (4.14)$$

A desigualdade (4.14) pode ser reescrita como

$$\sup_{\partial\Omega^+}[\omega] \leq (T^+ - T_0) \frac{(k_2 + k_1)}{2} + |T^+ - T_0| \frac{(k_1 - k_2)}{2} \quad (4.15)$$

Levando em conta as relações a seguir

$$\sup_{\Omega}[\omega - \Psi] = \sup_{\partial\Omega^+}[\omega - \Psi] \quad (4.16)$$

$$\sup_{\Omega}[\omega] \leq \sup_{\Omega}[\omega - \Psi] + \sup_{\Omega}[\Psi] \leq \sup_{\Omega}[\omega - \Psi] + \sup_{\Omega^+}[\Psi] \quad (4.17)$$

$$\sup_{\partial\Omega^+}[\omega - \Psi] \leq \sup_{\partial\Omega^+}[\omega] - \inf_{\partial\Omega^+}[\Psi] \leq \sup_{\partial\Omega^+}[\omega] - \inf_{\Omega^+}[\Psi] \quad (4.18)$$

pode ser concluído que (Taylor, 1958)

$$\sup_{\Omega} [\omega] \leq \sup_{\partial\Omega^+} [\omega] + \sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \quad (4.19)$$

Combinando a desigualdade (4.19) acima com a equação (4.15) obtém-se

$$\sup_{\Omega} [\omega] \leq (T^+ - T_0) \frac{(k_2 + k_1)}{2} + |T^+ - T_0| \frac{(k_1 - k_2)}{2} + \sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \quad (4.20)$$

onde T^+ é definido na equação (4.14). Em outras palavras, uma vez que o campo Ψ é escolhido, uma estimativa a priori para o limite superior para ω fica determinada, uma vez que o supremum de ω é maior ou igual a ω .

Além disso, a partir da equação (3.7) tem-se

$$\sup_{\Omega} [T] \leq \left| \sup_{\Omega} [\omega] \right| \left\{ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right\} + \left\{ \sup_{\Omega} [\omega] \right\} \left\{ \frac{1}{2k_2} + \frac{1}{2k_1} \right\} + T_0 \quad (4.21)$$

Então, levando em conta a equação (4.20), pode-se concluir que

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} [T] \leq & \left| (T^+ - T_0) \frac{(k_2 + k_1)}{2} + |T^+ - T_0| \frac{(k_1 - k_2)}{2} + \sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \right| \left\{ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right\} + \\ & + \left[(T^+ - T_0) \frac{(k_2 + k_1)}{2} + |T^+ - T_0| \frac{(k_1 - k_2)}{2} + \sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \right] \left\{ \frac{1}{2k_2} + \frac{1}{2k_1} \right\} + T_0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Como na região Ω a temperatura T é menor que (ou igual ao) seu supremo em Ω a desigualdade expressa pela equação (4.22) acima representa um limite superior estimado a priori para a temperatura T .

A desigualdade (4.22) pode ser representada de uma forma mais conveniente, considerando 3 situações a seguir:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & (T^+ - T_0) \frac{(k_2 + k_1)}{2} + |T^+ - T_0| \frac{(k_1 - k_2)}{2} + \sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \geq 0 \quad \text{com } T^+ \geq T_0 \\
 2) \quad & (T^+ - T_0) \frac{(k_2 + k_1)}{2} + |T^+ - T_0| \frac{(k_1 - k_2)}{2} + \sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \geq 0 \quad \text{com } T^+ \leq T_0 \\
 3) \quad & (T^+ - T_0) \frac{(k_2 + k_1)}{2} + |T^+ - T_0| \frac{(k_1 - k_2)}{2} + \sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \leq 0 \quad (\text{onde } T^+ \leq T_0)
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

Para a primeira situação a desigualdade (4.22) leva a

$$\boxed{\text{situação 1)}} \Rightarrow \sup_{\Omega} [T] \leq \frac{1}{k_1} \left[\sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \right] + T_{\infty} + \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^*} \|\text{grad } \Psi\| \tag{4.24}$$

Para a terceira situação a desigualdade (4.22) origina

$$\boxed{\text{situação 3)}} \Rightarrow \sup_{\Omega} [T] \leq \frac{1}{k_2} \left[\sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \right] + T_{\infty} + \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^*} \|\text{grad } \Psi\| \tag{4.25}$$

Para a segunda situação, considerando a equação (4.22), obtém-se a seguinte relação

$$\sup_{\Omega} [T] \leq \frac{1}{k_1} \left[\sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \right] + \left(T_{\infty} + \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^*} \|\text{grad } \Psi\| \right) \frac{k_2}{k_1} + T_0 \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right) \quad (4.26)$$

Levando em conta que, para a segunda situação,

$$0 \leq -2(T^+ - T_0)k_2 \leq \sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \quad (4.27)$$

então, a desigualdade (4.26) pode ser substituída pela relação a seguir, na qual T_0 não aparece

$$\boxed{\text{situação 2)} \Rightarrow \sup_{\Omega} [T] \leq \left(\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right) \left[\sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \right] + T_{\infty} + \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^*} \|\text{grad } \Psi\| \quad (4.28)$$

No caso $k = k_1 = k_2$, os resultados anteriores permitem concluir que as equações (32), (33) e (36) são coincidentes. Neste caso (linear) a seguinte estimativa pode ser obtida

$$\sup_{\Omega} [T] \leq \frac{1}{k} \left[\sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \right] + T_{\infty} + \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^*} \|\text{grad } \Psi\| \quad (4.29)$$

4.1.1. Estimativa de Limite Superior para a Temperatura – As escolhas de Ψ

Como o campo Ψ pode ser qualquer solução da equação (4.2), existem infinitas possibilidades de escolha para Ψ . Por exemplo, as quatro escolhas a seguir (representadas no sistema de coordenadas cartesiano retangular)

$$\Psi = -\frac{Cx^2}{2}, \quad \Psi = -\frac{Cz^2}{2}, \quad \Psi = -\frac{C(x^2 + y^2)}{4} \quad \text{e} \quad \Psi = -\frac{C(x^2 + y^2 + z^2)}{6} \quad (4.30)$$

onde

$$C = \sup_{\Omega} [\dot{q}] = \text{constante} \quad (4.31)$$

Cada uma destas escolhas origina uma estimativa diferente para o limite superior, mesmo que seja suposta a mesma região Ω^* . Supondo que Ω^* seja o cilindro circular definido a seguir

$$\Omega^* \equiv \{(x, y, z) \text{ tal que } x^2 + y^2 < R^2 \text{ and } -L < z < L\} \quad (4.32)$$

As quatro escolhas diferentes para o campo Ψ , descritas na equação (4.30), originam os resultados apresentados a seguir na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Alguns resultados para um conjunto de quatro escolhas diferentes para a função Ψ , com Ω^* dado pela equação (4.32).

	$\sup_{\partial\Omega} \ \text{grad } \Psi\ =$	$\inf_{\Omega^*} [\Psi] =$	$\sup_{\Omega^*} [\Psi] =$
$\Psi = -\frac{Cx^2}{2}$	CR	$-\frac{CR^2}{2}$	0
$\Psi = -\frac{Cz^2}{2}$	CL	$-\frac{CL^2}{2}$	0
$\Psi = -\frac{C(x^2 + y^2)}{4}$	$\frac{CR}{2}$	$-\frac{CR^2}{4}$	0
$\Psi = -\frac{C(x^2 + y^2 + z^2)}{6}$	$\frac{C}{3}(R^2 + L^2)^{1/2}$	$-\frac{C}{6}(L^2 + R^2)$	0

4.1.2. Estimativa de Limite Superior para a Temperatura – Um exemplo – Problema com simetria esférica

Nesta seção um problema muito simples que apresenta uma solução exata que pode ser obtida de uma forma muito fácil é considerado, a fim de embasar e ilustrar as estimativas apresentadas anteriormente. O problema é o processo de transferência de calor por condução unidimensional em regime transiente no corpo esférico com condutividade térmica dependente da temperatura, que pode ser representado como

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 k \frac{dT}{dr} \right) \right] + \dot{q} = 0 \quad 0 \leq r < R, \quad \text{com} \quad k = \begin{cases} k_1 & \text{for } T_0 < T \\ k_2 & \text{for } T_0 \geq T \end{cases} \quad (4.33)$$

$$-k \frac{dT}{dr} = h(T - T_\infty) \quad \text{at } r = R$$

onde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Empregando a nova variável ω definida pela equação (3.1), o problema descrito pela equação (4.33) torna-se

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\omega}{dr} \right) \right] + \dot{q} &= 0 \quad 0 \leq r < R \\ -\frac{d\omega}{dr} &= h \left(|\omega| \left\{ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right\} + \omega \left\{ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right\} + T_0 - T_\infty \right) \quad \text{em } r = R \end{aligned} \quad (4.34)$$

Supondo que \dot{q} seja uma constante (positiva), tem-se

$$\omega = \bar{c} + \frac{\dot{q}}{6} (R^2 - r^2) \quad (4.35)$$

onde a constante \bar{c} é dada por

$$\bar{c} = \left(\frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_0 \right) \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_0 \right| \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) \quad (4.36)$$

Portanto, da distribuição de temperaturas é dada pela seguinte equação

$$\begin{aligned} T = & \left\{ \left(\frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_0 \right) \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_0 \right| \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) + \frac{\dot{q}}{6} (R^2 - r^2) \right\} \left(\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right) + \\ & + \left\{ \left(\frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_0 \right) \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_0 \right| \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) + \frac{\dot{q}}{6} (R^2 - r^2) \right\} \left(\frac{1}{2k_2} + \frac{1}{2k_1} \right) + T_0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

É interessante observar que quando $k_1 = k_2$, a equação (4.37) reduz-se à conhecida distribuição de temperaturas em uma esfera com geração de calor uniforme, dada pela equação a seguir

$$T = \left[\frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty + \frac{\dot{q}}{6k} (R^2 - r^2) \right], \quad \text{onde } k = k_1 = k_2 \quad (4.38)$$

Como \dot{q} é sempre positiva em qualquer ponto do espaço, a equação (4.37) permite concluir que o máximo para a temperatura T é alcançado em $r = 0$. Neste ponto o supremo e o máximo coincidem, sendo dados por

$$\begin{aligned} \max_{\Omega} T = & \left\{ \left(\frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_0 \right) \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_0 \right| \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) + \frac{\dot{q}R^2}{6} \right\} \left(\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right) + \\ & + \left\{ \left(\frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_0 \right) \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_0 \right| \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) + \frac{\dot{q}R^2}{6} \right\} \left(\frac{1}{2k_2} + \frac{1}{2k_1} \right) + T_0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

É importante notar que a desigualdade (37) acima coincide com a equação (30), desde que a região Ω^* seja dada por (esfera de raio R)

$$\Omega^* \equiv \{ (x, y, z) \quad \text{tal que} \quad x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \} \quad (4.40)$$

e

$$\Psi = -\frac{C(x^2 + y^2 + z^2)}{6} \quad \text{com} \quad C = \sup_{\Omega} [\dot{q}] = \dot{q} = \text{constante} \quad (4.41)$$

Tabela 4.2 – Estimativas superiores para as quatro escolhas diferentes da função Ψ , supondo válida a equação (4.27).

Ψ	ESTIMATIVA PARA LIMITE SUPERIOR OBTIDA COM $\Omega^* \equiv \{(x, y, z) \text{ tal que } x^2 + y^2 < R^2 \text{ e } -L < z < L\}$
$\Psi = -\frac{Cx^2}{2}$	$\sup_{\Omega} T \leq \frac{CR}{h} + T_{\infty} + \left(\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2}\right) \frac{CR^2}{2}$
$\Psi = -\frac{Cz^2}{2}$	$\sup_{\Omega} T \leq \frac{CL}{h} + T_{\infty} + \left(\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2}\right) \frac{CL^2}{2}$
$\Psi = -\frac{C(x^2 + y^2)}{4}$	$\sup_{\Omega} T \leq \frac{CR}{2h} + T_{\infty} + \left(\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2}\right) \frac{CR^2}{4}$
$\Psi = -\frac{C(x^2 + y^2 + z^2)}{6}$	$\sup_{\Omega} T \leq \frac{C}{3h} [R^2 + L^2]^{1/2} + T_{\infty} + \left(\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2}\right) \frac{C(R^2 + L^2)}{6}$

Por outro lado, para cada um dos casos considerados na Tabela 1, os resultados apresentados na Tabela 4.2 podem ser obtidos, considerando as equações (4.29) e supondo que a equação (4.27) seja válida.

4.2. Condutividade Térmica com Dependência Linear na Temperatura – Estimativa de Limite Superior para a Temperatura

Combinando as equações (3.4) e (3.15) – representando a condição de contorno transformada para o problema com condutividade térmica com dependência linear na temperatura, mostrada nas equações (3.9) e (3.10), o problema original, representado pela equação (2.12), pode ser representado por

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \omega) + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -(\operatorname{grad} \omega) \cdot \mathbf{n} &= h \left(\sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{\omega + |\omega|}{\gamma}} - \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{|\omega| - \omega}{\gamma}} + T_{REF} - T_{\infty} \right) \quad (4.42) \\ &\quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

Assim como no item 4.1, define-se um campo Ψ da seguinte forma

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \Psi) + \sup_{\Omega} [\dot{q}] = 0 \quad \text{em } \Omega^*, \quad \text{com } \Omega \subseteq \Omega^* \quad (4.43)$$

sendo Ω^* um conjunto convenientemente escolhido.

Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\operatorname{grad}(\omega - \Psi)] &\geq 0 \quad \text{em } \Omega \\ -\operatorname{grad}(\omega - \Psi) \cdot \mathbf{n} &= h \left(\sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{\omega + |\omega|}{\gamma}} - \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{|\omega| - \omega}{\gamma}} + T_{REF} - T_{\infty} \right) \quad (4.44) \\ &\quad + \operatorname{grad} \Psi \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

Considerando as conclusões apresentadas nas equações (4.5) a (4.8), a partir da condição de contorno apresentada na equação (4.44), pode-se concluir a seguinte desigualdade

$$h \left(\sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{\omega + |\omega|}{\gamma}} - \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{|\omega| - \omega}{\gamma}} + T_{REF} - T_{\infty} \right) + \mathit{grad} \Psi \cdot \mathbf{n} \leq 0 \quad (4.45)$$

sobre $\partial\Omega^+$

e, portanto,

$$\sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{\omega + |\omega|}{\gamma}} - \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{|\omega| - \omega}{\gamma}} + T_{REF} - T_{\infty} \leq \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^+} [(\mathit{grad} \Psi) \cdot \mathbf{n}] \quad (4.46)$$

sobre $\partial\Omega^+$

A desigualdade (4.26) mostrada anteriormente permite escrever (Taylor, 1958)

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{\omega + |\omega|}{\gamma}} - \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{|\omega| - \omega}{\gamma}} + T_{REF} - T_{\infty} \\ & \leq \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^+} \|\mathit{grad} \Psi\| \quad \text{sobre } \partial\Omega^+ \end{aligned} \quad (4.47)$$

na qual o lado esquerdo representa uma função crescente de ω . Então o supremo de ω sobre $\partial\Omega^+$ é tal que

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{\sup_{\partial\Omega^+}[\omega] + \left|\sup_{\partial\Omega^+}[\omega]\right|}{\gamma}} - \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{\left|\sup_{\partial\Omega^+}[\omega]\right| - \sup_{\partial\Omega^+}[\omega]}{\gamma}} \\ & \leq T_{\infty} - T_{REF} + \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^+} \|\mathit{grad} \Psi\| \end{aligned} \quad (4.48)$$

Portanto

$$\sup_{\partial\Omega^*}[\omega] \leq \left\{ \frac{\gamma}{2} \left| T_\infty - T_{REF} + \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^*} \|grad \Psi\| \right| + \bar{k} \right\} \left(T_\infty - T_{REF} + \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^*} \|grad \Psi\| \right) \quad (4.49)$$

Neste ponto devem-se levar em conta as conclusões obtidas a partir das equações (4.16) a (4.19). Combinando esta última com a equação (4.49) chega-se a

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega}[\omega] &\leq \left\{ \frac{\gamma}{2} \left| T_\infty - T_{REF} + \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^*} \|grad \Psi\| \right| + \bar{k} \right\} \times \\ &\times \left(T_\infty - T_{REF} + \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^*} \|grad \Psi\| \right) + \sup_{\Omega^*}[\Psi] - \inf_{\Omega^*}[\Psi] \end{aligned} \quad (4.50)$$

Em outras palavras, uma vez que o campo Ψ é escolhido, existe uma estimativa a priori para o limite superior de ω , pois o supremo de ω tem um valor sempre maior ou igual a ω .

Além disso, a partir da inversa da transformada Kirchhoff, pode-se concluir que

$$\sup_{\Omega}[T] = \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{\sup[\omega] + \left|\sup_{\Omega}[\omega]\right|}{\gamma}} - \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{\left|\sup_{\Omega}[\omega]\right| - \sup[\omega]}{\gamma}} + T_{REF} \quad (4.51)$$

Então, levando em conta a equação (4.50) pode-se chegar a

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega} [T] \leq & \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \frac{|\delta|\delta}{2} + \frac{\bar{k}}{\gamma}\delta + \frac{1}{\gamma}\left(\sup_{\Omega^*}[\Psi] - \inf_{\Omega^*}[\Psi]\right) + \left|\frac{|\delta|\delta}{2} + \frac{\bar{k}}{\gamma}\delta + \frac{1}{\gamma}\left(\sup_{\Omega^*}[\Psi] - \inf_{\Omega^*}[\Psi]\right)\right|} \\
& - \sqrt{\left(\frac{\bar{k}}{\gamma}\right)^2 + \left|\frac{|\delta|\delta}{2} + \frac{\bar{k}}{\gamma}\delta + \frac{1}{\gamma}\left(\sup_{\Omega^*}[\Psi] - \inf_{\Omega^*}[\Psi]\right)\right| - \frac{|\delta|\delta}{2} - \frac{\bar{k}}{\gamma}\delta - \frac{1}{\gamma}\left(\sup_{\Omega^*}[\Psi] - \inf_{\Omega^*}[\Psi]\right)} \\
& + T_{REF}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

onde

$$\delta = T_{\infty} - T_{REF} + \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^*} \|\text{grad } \Psi\| \tag{4.53}$$

Como, no corpo Ω , a temperature T é menor que (ou igual a) seu supremo em Ω , a desigualdade (4.52) representa uma estimativa a priori para o limite superior da temperatura T .

Quando $\gamma \rightarrow 0$ o caso clássico de condutividade térmica constante com $k = \bar{k}$ é recuperado. Levando em conta que

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{2} \quad \text{quando } x \rightarrow 0 \tag{4.54}$$

Chega-se a

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\Omega} [T] \right\} \leq T_{\infty} + \frac{1}{h} \sup_{\partial\Omega^*} \|\text{grad } \Psi\| + \frac{1}{\bar{k}} \left(\sup_{\Omega^*} [\Psi] - \inf_{\Omega^*} [\Psi] \right) \tag{4.55}$$

4.2.1. Estimativa de Limite Superior para a Temperatura – As escolhas de Ψ

Como existem infinitas possibilidades de escolha para o campo Ψ , que pode ser qualquer solução da equação (4.2), escolhe-se, por conveniência, os valores definidos pelas equações (4.30) e (4.31). Cada uma destas escolhas (definidas na equação (4.30)) origina uma estimativa diferente para o limite superior, mesmo que seja suposta a mesma região Ω^* . Supondo que Ω^* seja dado por Ω_1^* ou por Ω_2^* onde

$$\begin{aligned}\Omega_1^* &\equiv \{(x, y, z) \text{ tal que } x^2 + y^2 < R^2 \text{ e } -L < z < L\} \\ \Omega_2^* &\equiv \{(x, y, z) \text{ tal que } -L < x < L, -L < y < L \text{ e } -L < z < L\}\end{aligned}\tag{4.56}$$

As quatro escolhas diferentes para o campo Ψ , definidas pela equação (4.30), na região espacial Ω^* originam os resultados apresentados a seguir na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Alguns resultados para as quatro escolhas diferentes do campo Ψ , (equação (4.30)), com a região espacial Ω^* definida pela equação (4.56).

	$\sup_{\partial\Omega^*} \ \text{grad } \Psi\ $	$\inf_{\Omega^*} [\Psi]$	$\sup_{\Omega^*} [\Psi]$
$\Psi = -\frac{Cx^2}{2}$ com $\Omega^* \equiv \Omega_1^*$	CR	$-\frac{CL^2}{2}$	0
$\Psi = -\frac{Cz^2}{2}$ com $\Omega^* \equiv \Omega_1^*$	CL	$-\frac{CL^2}{2}$	0
$\Psi = -\frac{C(x^2 + y^2)}{4}$ com $\Omega^* \equiv \Omega_1^*$	$\frac{CR}{2}$	$-\frac{CR^2}{4}$	0
$\Psi = -\frac{C(x^2 + y^2 + z^2)}{6}$ com $\Omega^* \equiv \Omega_1^*$	$\frac{C}{3}(R^2 + L^2)^{1/2}$	$-\frac{C}{6}(L^2 + R^2)$	0
$\Psi = -\frac{Cx^2}{2}$ com $\Omega^* \equiv \Omega_2^*$	CL	$-\frac{CL^2}{2}$	0
$\Psi = -\frac{Cz^2}{2}$ com $\Omega^* \equiv \Omega_2^*$	CL	$-\frac{CL^2}{2}$	0
$\Psi = -\frac{C(x^2 + y^2)}{4}$ com $\Omega^* \equiv \Omega_2^*$	$CL\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{CL^2}{2}$	0
$\Psi = -\frac{C(x^2 + y^2 + z^2)}{6}$ com $\Omega^* \equiv \Omega_2^*$	$CL\frac{\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{CL^2}{2}$	0

4.2.2. Estimativa de Limite Superior para a Temperatura – Um exemplo – Problema com simetria esférica

Considera-se agora um caso particular das equações (2.12) e (3.9) cuja solução exata pode ser facilmente obtida, a fim de validar e ilustrar as estimativas previamente apresentadas. O problema é a transferência de calor por condução em regime permanente, unidimensional, num corpo esférico com $k = k_0(1 + \beta T)$ representado por

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 k \frac{dT}{dr} \right) \right] + \dot{q} = 0 \quad 0 \leq r < R, \quad \text{com} \quad k = k_0(1 + \beta T)$$

$$\text{e} \quad \dot{q} = \text{constante} > 0 \quad (4.57)$$

$$-k \frac{dT}{dr} = h(T - T_\infty) \quad \text{em} \quad r = R$$

onde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Da equação (4.57) vem

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 (1 + \beta T) \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{q} r^2}{k_0} \Rightarrow r^2 (1 + \beta T) \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q} r^3}{3k_0} + C_1 \quad (4.58)$$

onde $C_1 = 0$, uma vez que a equação (4.58) tem que ser válida para $r = 0$. Então, a equação (4.58) permite concluir que

$$(1 + \beta T) \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q} r}{3k_0} \Rightarrow \frac{(1 + \beta T)^2}{2\beta} = -\frac{\dot{q} r^2}{6k_0} + C$$

$$\Rightarrow (1 + \beta T)^2 = -\frac{\dot{q} \beta}{3k_0} r^2 + \bar{C} \quad (4.59)$$

onde a constante \bar{C} é determinada a partir da condição de contorno

$$\begin{aligned}
 2\beta(1+\beta T)dT &= -\frac{\dot{q}\beta}{3k_0}2rdr \Rightarrow -k\frac{dT}{dr} = \frac{\dot{q}}{3}r \Rightarrow -k\frac{dT}{dr}\Big|_{r=R} = \frac{\dot{q}}{3}R \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{\dot{q}}{3}R = h(T|_{r=R} - T_\infty) \Rightarrow T|_{r=R} = T_\infty + \frac{\dot{q}R}{3h} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left(1 + \beta T_\infty + \frac{\dot{q}\beta R}{3h}\right)^2 &= -\frac{\dot{q}\beta}{3k_0}R^2 + \bar{C} \Rightarrow \bar{C} = \left(1 + \beta T_\infty + \frac{\dot{q}\beta R}{3h}\right)^2 + \frac{\dot{q}\beta}{3k_0}R^2
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Consequentemente, pode-se concluir que

$$(1 + \beta T)^2 = \left(1 + \beta T_\infty + \frac{\dot{q}\beta R}{3h}\right)^2 + \frac{\dot{q}\beta}{3k_0}(R^2 - r^2) \tag{4.61}$$

e, portanto, a positividade de \bar{C} é uma condição necessária para a existência de uma solução que possua significado físico – significando que a condutividade térmica k deve ser sempre (em toda e qualquer posição) real e positiva.

Mesmo com $\bar{C} > 0$, duas soluções distintas podem ser obtida, uma delas desprovida de sentido físico. Estas soluções são dadas por

$$T = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \sqrt{\left(1 + \beta T_\infty + \frac{\dot{q}\beta R}{3h}\right)^2 + \frac{\dot{q}\beta}{3k_0}(R^2 - r^2)} - \frac{1}{\beta} & \text{(com sentido físico se } \bar{C} > 0) \\ -\frac{1}{\beta} \sqrt{\left(1 + \beta T_\infty + \frac{\dot{q}\beta R}{3h}\right)^2 + \frac{\dot{q}\beta}{3k_0}(R^2 - r^2)} - \frac{1}{\beta} & \text{(sem sentido físico)} \end{cases} \tag{4.62}$$

É importante notar que, quando $\beta \rightarrow 0$ (e, conseqüentemente, $\bar{C} = 1$), a primeira equação de (4.62) reduz-se à bem conhecida distribuição de temperaturas em uma esfera com geração de calor uniforme e condutividade térmica constante k_0

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} T = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\beta} \left[\sqrt{\left(\frac{\dot{q}\beta R}{3h} + 1 + \beta T_\infty \right)^2 + \frac{\dot{q}\beta(R^2 - r^2)}{3k_0}} - 1 \right] \right\} \quad (4.63)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} T = \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty + \frac{\dot{q}(R^2 - r^2)}{6k_0}$$

Enquanto a segunda equação de (4.62) não tem limite.

Como a fonte interna de calor \dot{q} é sempre positiva em toda e qualquer região, observa-se que, para a solução fisicamente admissível, o máximo de T é alcançado em $r = 0$, sendo dado por

$$\max_{\Omega} [T] = \frac{1}{\beta} \sqrt{\left(1 + \beta T_\infty + \frac{\dot{q}\beta R}{3h} \right)^2 + \frac{\dot{q}\beta R^2}{3k_0}} - \frac{1}{\beta} \quad (4.64)$$

É interessante notar que no caso descrito pela equação (4.64) o máximo e o supremo coincidem.

É importante observar que o lado direito da equação (4.64) coincide com o lado direito da equação (4.52), desde que Ω^* seja dado por (esfera com raio R)

$$\Omega^* \equiv \{(x, y, z) \text{ tal que } x^2 + y^2 + z^2 < R^2\} \quad (4.65)$$

e

$$\Psi = -\frac{C(x^2 + y^2 + z^2)}{6} \quad \text{com} \quad C = \sup_{\Omega} [\dot{q}] = \dot{q} = \text{constante} \quad (4.66)$$

como, a partir das equações (4.65) e (4.66), os seguintes resultados são obtidos

$$\sup_{\partial\Omega^*} \|\text{grad } \Psi\| = \frac{CR}{3}, \quad \inf_{\Omega^*} [\Psi] = \frac{-CR^2}{6} \quad \text{and} \quad \sup_{\Omega^*} [\Psi] = 0 \quad (4.67)$$

Se, em vez do problema definido pelas equações (2.12) e (3.9), for considerado o problema definido pelas equações (2.12) e (3.10), a seguinte solução é obtida

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 k \frac{dT}{dr} \right) \right] + \dot{q} = 0 \quad 0 \leq r < R, \quad \text{com} \quad k = \bar{k} + \gamma |T - T_{REF}|$$

$$\text{e} \quad \dot{q} = \text{constante} > 0 \quad (4.68)$$

$$-k \frac{dT}{dr} = h(T - T_{\infty}) \quad \text{em} \quad r = R$$

Da equação (4.68) vem

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 (\bar{k} + \gamma |T - T_{REF}|) \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{q} r^2}{k_0}$$

$$\Rightarrow \quad r^2 (\bar{k} + \gamma |T - T_{REF}|) \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q} r^3}{3k_0} + C_1 \quad (4.69)$$

onde $C_1 = 0$, pois a equação (4.69) tem que ser válida para $r=0$. Então, a equação (4.69) dá origem a

$$\begin{aligned} (\bar{k} + \gamma|T - T_{REF}|) \frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}r}{3} \\ \Rightarrow \bar{k}(T - T_{REF}) + \frac{\gamma}{2}(T - T_{REF})|T - T_{REF}| &= -\frac{\dot{q}r^2}{6} + \bar{C} \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde a constante \bar{C} é determinada a partir da condição de contorno. Como

$$\begin{aligned} -k \frac{dT}{dr} &= \frac{\dot{q}}{3} r \Rightarrow -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = \frac{\dot{q}}{3} R \\ \Rightarrow \frac{\dot{q}}{3} R &= h(T|_{r=R} - T_\infty) \Rightarrow T|_{r=R} = T_\infty + \frac{\dot{q}R}{3h} \end{aligned} \quad (4.71)$$

e \bar{C} é dado por

$$\bar{C} = \bar{k} \left(T_\infty + \frac{\dot{q}R}{3h} - T_{REF} \right) + \frac{\gamma}{2} \left(T_\infty + \frac{\dot{q}R}{3h} - T_{REF} \right) \left| T_\infty + \frac{\dot{q}R}{3h} - T_{REF} \right| + \frac{\dot{q}R^2}{6} \quad (4.72)$$

Portanto, a distribuição de temperaturas é obtida de forma única a partir de

$$\begin{aligned} \bar{k}(T - T_{REF}) + \frac{\gamma}{2}(T - T_{REF})|T - T_{REF}| &= \\ = \frac{\dot{q}(R^2 - r^2)}{6} + \bar{k} \left(T_\infty + \frac{\dot{q}R}{3h} - T_{REF} \right) + \frac{\gamma}{2} \left(T_\infty + \frac{\dot{q}R}{3h} - T_{REF} \right) \left| T_\infty + \frac{\dot{q}R}{3h} - T_{REF} \right| \end{aligned} \quad (4.73)$$

Em outras palavras a expressão a seguir, sempre dotada de sentido físico, representa a temperatura

$$T = \frac{\bar{k}}{\gamma\sqrt{2}} \left(\sqrt{2 + \phi + |\phi|} - \sqrt{2 - \phi + |\phi|} \right) + T_{REF} \quad (4.74)$$

onde ϕ é dado por

$$\phi = \frac{\gamma}{\bar{k}^2} \left\{ \frac{\dot{q}(R^2 - r^2)}{6} + \bar{k} \left(T_{\infty} + \frac{\dot{q}R}{3h} - T_{REF} \right) + \frac{\gamma}{2} \left(T_{\infty} + \frac{\dot{q}R}{3h} - T_{REF} \right) \left| T_{\infty} + \frac{\dot{q}R}{3h} - T_{REF} \right| \right\} \quad (4.75)$$

É importante observar que a temperatura T é uma função crescente da função ϕ definida pela equação (4.75). Então, o máximo de T é alcançado quando ϕ assumir seu máximo. Este máximo efetivamente existe e ocorre para $r = R$, sendo dado por

$$\max_{\Omega} [T] = \frac{\bar{k}}{\gamma\sqrt{2}} \left(\sqrt{2 + \phi_{MAX} + |\phi_{MAX}|} - \sqrt{2 - \phi_{MAX} + |\phi_{MAX}|} \right) + T_{REF} \quad (4.76)$$

onde

$$\phi_{MAX} = \frac{\gamma}{\bar{k}^2} \left\{ \frac{\dot{q}R^2}{6} + \bar{k} \left(T_{\infty} + \frac{\dot{q}R}{3h} - T_{REF} \right) + \frac{\gamma}{2} \left(T_{\infty} + \frac{\dot{q}R}{3h} - T_{REF} \right) \left| T_{\infty} + \frac{\dot{q}R}{3h} - T_{REF} \right| \right\} \quad (4.77)$$

5 Uma simulação numérica por Elementos Finitos

A partir do funcional descrito abaixo

$$I[T] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} k \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} T dA - \int_{\Omega} \dot{q} T dA + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\alpha}{2} T^2 - \beta T \right) dL,$$

sendo k ($k > 0$) e \dot{q} funções prescritas α e β constantes e T a distribuição de temperatura, consideremos o processo de minimização.

Utilizaremos a seguinte malha para cálculo do funcional pelo método dos Elementos Finitos

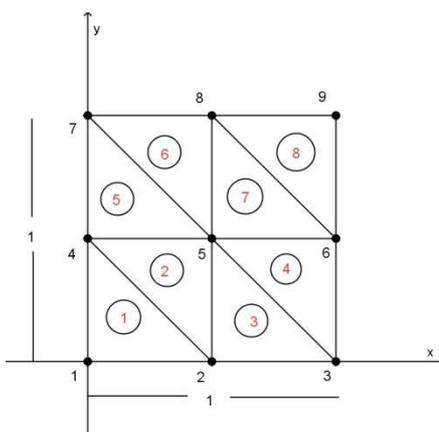


Figura 1 :

com nove nós $1(0; 0)$, $2(1/2; 0)$, $3(1; 0)$, $4(0; 1/2)$, $5(1/2; 1/2)$, $6(1; 1/2)$, $7(0; 1)$, $8(1/2; 1)$ e $9(1; 1)$, e com oito elementos numerados de 1 a 8. Representaremos T_i como sendo a temperatura no nó i e $T^{(i)}$ a distribuição de temperatura no elemento i .

Na primeira integral do funcional descrito $\frac{1}{2} \int_{\Omega} k \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} T dA$, temos $\operatorname{grad} T$ constante. Tomando como base o elemento da figura (2) e sabendo que $T = a + bx + cy$, temos que $\operatorname{grad} T = b\vec{i} + c\vec{j}$, constante no elemento. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} k \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} T dA &= \frac{k}{2} \|\operatorname{grad} T\|^2 A \\ &= \frac{kLH}{4} \left[\left(\frac{T_B - T_A}{L} \right)^2 + \left(\frac{T_C - T_A}{H} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Estendendo o resultado para os elementos da malha na figura (1), obtemos

$$\begin{aligned}
\text{Elemento 1: } & \frac{k}{2} \|\text{grad}T^{(1)}\|^2 A = \frac{k}{4} [(T_2 - T_1)^2 + (T_4 - T_1)^2]; \\
\text{Elemento 2: } & \frac{k}{2} \|\text{grad}T^{(2)}\|^2 A = \frac{k}{4} [(T_5 - T_4)^2 + (T_5 - T_2)^2]; \\
\text{Elemento 3: } & \frac{k}{2} \|\text{grad}T^{(3)}\|^2 A = \frac{k}{4} [(T_3 - T_2)^2 + (T_5 - T_2)^2]; \\
\text{Elemento 4: } & \frac{k}{2} \|\text{grad}T^{(4)}\|^2 A = \frac{k}{4} [(T_6 - T_5)^2 + (T_6 - T_3)^2]; \\
\text{Elemento 5: } & \frac{k}{2} \|\text{grad}T^{(5)}\|^2 A = \frac{k}{4} [(T_5 - T_4)^2 + (T_7 - T_4)^2]; \\
\text{Elemento 6: } & \frac{k}{2} \|\text{grad}T^{(6)}\|^2 A = \frac{k}{4} [(T_8 - T_7)^2 + (T_8 - T_5)^2]; \\
\text{Elemento 7: } & \frac{k}{2} \|\text{grad}T^{(7)}\|^2 A = \frac{k}{4} [(T_6 - T_5)^2 + (T_8 - T_5)^2]; \\
\text{Elemento 8: } & \frac{k}{2} \|\text{grad}T^{(8)}\|^2 A = \frac{k}{4} [(T_9 - T_8)^2 + (T_9 - T_6)^2].
\end{aligned}$$

Ainda utilizaremos o elemento da figura (2) para o cálculo analítico da segunda integral do funcional $\int \Omega \dot{q} T dA$. A distribuição de temperatura no elemento pode ser expressa como $T = a + bx + cy$.

Temos $T_A = a + bx_A + cy_A$, sabendo que $A(0; 0)$, $T_A = a$. E tomando os $B(L; 0)$ e $C(0; H)$, temos $T_B = T_A + bL$ e $T_C = T_A + cH$, com $b = \frac{T_B - T_A}{L}$ e $c = \frac{T_C - T_A}{H}$ e a reta BC expressa por $x = L - \frac{L}{H}y$.

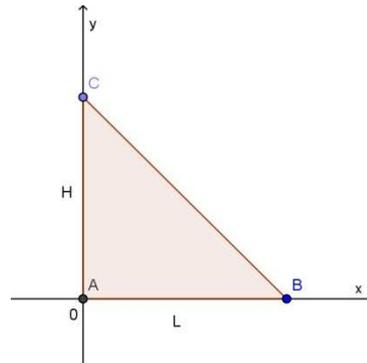


Figura 2: Elemento triangular linear é um triângulo retângulo de catetos H e L com vértice A na origem

Calculando a integral de superfície $\int \Omega T dA$, temos

$$\begin{aligned}
\iint T dA &= \int_0^H \int_0^{L - \frac{L}{H}y} \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{L}x + \frac{T_C - T_A}{H}y \right) dx dy \\
&= \int_0^H \left(T_A x + \frac{T_B - T_A}{L} \frac{x^2}{2} + \frac{T_C - T_A}{H} xy \right) \Big|_0^{L - \frac{L}{H}y} dy \\
&= T_A LH - T_A \frac{LH}{2} + \frac{T_B - T_A}{2L} \frac{L^2 H}{3} + \frac{T_C - T_A}{H} \left(\frac{LH^2}{2} - \frac{LH^2}{3} \right) \\
&= LH \left(\frac{T_A}{6} + \frac{T_B}{6} + \frac{T_C}{6} \right) \\
&= \frac{LH}{2} \left(\frac{T_A + T_B + T_C}{3} \right).
\end{aligned}$$

Resultado que representa a média aritmética das temperaturas nos nós multiplicada pela área do triângulo. Dessa forma, ao estendermos o resultado para os elementos da malha na figura (1), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Elemento 1: } \int_{\Omega} T^{(1)} dA &= \frac{T_1 + T_2 + T_4}{3} \cdot \frac{1}{8}; \\ \text{Elemento 2: } \int_{\Omega} T^{(2)} dA &= \frac{T_2 + T_4 + T_5}{3} \cdot \frac{1}{8}; \\ \text{Elemento 3: } \int_{\Omega} T^{(3)} dA &= \frac{T_2 + T_3 + T_5}{3} \cdot \frac{1}{8}; \\ \text{Elemento 4: } \int_{\Omega} T^{(4)} dA &= \frac{T_3 + T_5 + T_6}{3} \cdot \frac{1}{8}; \\ \text{Elemento 5: } \int_{\Omega} T^{(5)} dA &= \frac{T_4 + T_5 + T_7}{3} \cdot \frac{1}{8}; \\ \text{Elemento 6: } \int_{\Omega} T^{(6)} dA &= \frac{T_5 + T_7 + T_8}{3} \cdot \frac{1}{8}; \\ \text{Elemento 7: } \int_{\Omega} T^{(7)} dA &= \frac{T_5 + T_6 + T_8}{3} \cdot \frac{1}{8}; \\ \text{Elemento 8: } \int_{\Omega} T^{(8)} dA &= \frac{T_6 + T_8 + T_9}{3} \cdot \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

No cálculo da integral de linha $\int \partial\Omega \left(\frac{a}{2} T^2 - \beta T \right) dL$, separaremos a integral em duas parcelas, uma que envolve o termo linear e outro que envolve o termo quadrático.

Entre os nós A e B do elemento, temos que $T = a + bx$, de forma que $T_A = a + bx_A$ e $T_B = a + bx_B$, logo $b = \frac{T_B - T_A}{x_B - x_A} = \frac{T_B - T_A}{L}$. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} T dx &= \int_{x_A}^{x_B} (a + bx) dx \\ &= \frac{(a + bx)^2}{2b} \Big|_{x_A}^{x_B} \\ &= \frac{T_B^2 - T_A^2}{2b} \\ &= \frac{(T_B - T_A)(T_B + T_A)}{2 \frac{T_B - T_A}{L}} \\ &= \frac{L}{2} (T_B + T_A). \end{aligned}$$

E o termo quadrático fica

$$\begin{aligned}
\int_{x_A}^{x_B} T^2 dx &= \int_{x_A}^{x_B} (a + bx)^2 dx \\
&= \frac{(a + bx)^3}{3b} \Big|_{x_A}^{x_B} \\
&= \frac{T_B^3 - T_A^3}{3b} \\
&= \frac{T_B^3 - T_A^3}{3 \frac{T_B - T_A}{L}} \\
&= (T_B^2 + T_B T_A + T_A^2) \frac{L}{3}.
\end{aligned}$$

Entre os nós A e C do elemento, temos que $T = a + cy$, de forma que $T_A = a + cy_A$ e $T_B = a + cy_b$, logo $c = \frac{T_C - T_A}{y_C - y_A} = \frac{T_C - T_A}{H}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{y_A}^{y_C} T dy &= \int_{y_A}^{y_C} (a + cy) dy \\
&= \frac{(a + cy)^2}{2c} \Big|_{y_A}^{y_C} \\
&= \frac{T_C^2 - T_A^2}{2c} \\
&= \frac{(T_C - T_A)(T_C + T_A)}{2 \frac{T_C - T_A}{H}} \\
&= \frac{H}{2} (T_C + T_A).
\end{aligned}$$

E nesse caso, o termo quadrático fica

$$\begin{aligned}
\int_{y_A}^{y_C} T^2 dy &= \int_{y_A}^{y_C} (a + cy)^2 dy \\
&= \frac{(a + cy)^3}{3c} \Big|_{y_A}^{y_C} \\
&= \frac{T_C^3 - T_A^3}{3c} \\
&= \frac{T_C^3 - T_A^3}{3 \frac{T_C - T_A}{H}} \\
&= (T_C^2 + T_C T_A + T_A^2) \frac{H}{3}.
\end{aligned}$$

O funcional inicial dividido em três partes fica

$$I[T] = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} k \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} T dA}_A - \underbrace{\int_{\Omega} \dot{q} T dA}_B + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\alpha}{2} T^2 - \beta T \right) dL}_C,$$

de forma que

$$A = \frac{k}{4}[(T_2 - T_1)^2 + (T_4 - T_1)^2 + (T_3 - T_2)^2 + (T_7 - T_4)^2 + (T_6 - T_3)^2 + (T_8 - T_7)^2 + (T_9 - T_6)^2 + (T_9 - T_8)^2 + 2((T_5 - T_2)^2 + (T_5 - T_4)^2 + (T_6 - T_5)^2 + (T_8 - T_5)^2)],$$

$$B = -\frac{\dot{q}}{24}[T_1 + T_9 + 2(T_3 + T_7) + 3(T_2 + T_4 + T_6 + T_8) + 6T_5]$$

e

$$C = \frac{\alpha}{12}[(T_1^2 + T_1T_2 + T_2^2) + (T_2^2 + T_2T_3 + T_3^2) + (T_3^2 + T_3T_6 + T_6^2) + (T_6^2 + T_6T_9 + T_9^2) + (T_9^2 + T_9T_8 + T_8^2) + (T_8^2 + T_8T_7 + T_7^2) + (T_7^2 + T_7T_4 + T_4^2) + (T_4^2 + T_4T_1 + T_1^2)] - \frac{\beta}{2}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9).$$

5.1 Solução do caso específico

Admitindo que nosso funcional é convexo e coercivo, a solução de $\delta I(T) = \sum_{i=1}^9 \frac{\partial I}{\partial T_i} = 0$ que minimiza o funcional existe e é única. Vamos calcular a solução do nosso problema utilizando a malha (1).

Resolveremos o sistema linear proveniente de $\frac{\partial I}{\partial T_i} = 0$, com $i = 1..9$. Nossas equações ficam

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial T_1} &= \frac{k}{4}[4T_1 - 2T_2 - 2T_4] - \frac{\dot{q}}{24} + \frac{\alpha}{12}[4T_1 + T_2 + T_4] - \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial T_2} &= \frac{k}{4}[8T_2 - 2T_1 - 2T_3 - 4T_5] - \frac{\dot{q}}{8} + \frac{\alpha}{12}[4T_2 + T_1 + T_3] - \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial T_3} &= \frac{k}{4}[4T_3 - 2T_2 - 2T_6] - \frac{\dot{q}}{12} + \frac{\alpha}{12}[4T_3 + T_2 + T_6] - \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial T_4} &= \frac{k}{4}[8T_4 - 2T_1 - 2T_7 - 4T_5] - \frac{\dot{q}}{8} + \frac{\alpha}{12}[4T_4 + T_1 + T_7] - \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial T_5} &= \frac{k}{4}[16T_5 - 4T_2 - 4T_4 - 4T_6 - 4T_8] - \frac{\dot{q}}{4} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial T_6} &= \frac{k}{4}[8T_6 - 2T_3 - 2T_9 - 4T_5] - \frac{\dot{q}}{8} + \frac{\alpha}{12}[4T_6 + T_3 + T_9] - \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial T_7} &= \frac{k}{4}[4T_7 - 2T_4 - 2T_8] - \frac{\dot{q}}{12} + \frac{\alpha}{12}[4T_7 + T_4 + T_8] - \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial T_8} &= \frac{k}{4}[8T_8 - 2T_7 - 2T_9 - 4T_5] - \frac{\dot{q}}{8} + \frac{\alpha}{12}[4T_8 + T_7 + T_9] - \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial T_9} &= \frac{k}{4}[4T_9 - 2T_6 - 2T_8] - \frac{\dot{q}}{24} + \frac{\alpha}{12}[4T_9 + T_6 + T_8] - \frac{\beta}{2} = 0. \end{aligned}$$

As equações formam o sistema linear $\left(\frac{k}{4}A + \frac{\alpha}{12}B\right) \cdot T = F$, com as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 16 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -2 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} + \frac{\dot{q}}{24} \\ \frac{\beta}{2} + 3\frac{\dot{q}}{24} \\ \frac{\beta}{2} + 2\frac{\dot{q}}{24} \\ \frac{\beta}{2} + 3\frac{\dot{q}}{24} \\ 6\frac{\dot{q}}{24} \\ \frac{\beta}{2} + 3\frac{\dot{q}}{24} \\ \frac{\beta}{2} + 2\frac{\dot{q}}{24} \\ \frac{\beta}{2} + 3\frac{\dot{q}}{24} \\ \frac{\beta}{2} + \frac{\dot{q}}{24} \end{pmatrix}.$$

Para efeito de simplificação, adotamos $\beta = \dot{q} = 1$. A solução do sistema fica

$$T = \begin{pmatrix} 1.205528846153846 \\ 1.278846153846154 \\ 1.236778846153846 \\ 1.278846153846154 \\ 1.341346153846154 \\ 1.278846153846154 \\ 1.236778846153846 \\ 1.278846153846154 \\ 1.205528846153846 \end{pmatrix}.$$

Minimizando o funcional em uma malha de dimensão $n \times n$, trabalhamos com uma matriz A de dimensão $n^2 \times n^2$, em blocos $n \times n$, que possui a seguinte forma

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & D_s & 0 & 0 & \ddots \\ D_s & D_2 & D_s & \ddots & 0 \\ 0 & D_s & \ddots & D_s & 0 \\ 0 & \ddots & D_s & D_2 & D_s \\ \ddots & 0 & 0 & D_s & D_1 \end{pmatrix}.$$

Os blocos diagonais D_1 e D_2 e o bloco subdiagonal D_s possuem a forma

$$D_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & \ddots \\ -2 & 8 & -2 & \ddots & 0 \\ 0 & -2 & \ddots & -2 & 0 \\ 0 & \ddots & -2 & 8 & -2 \\ \ddots & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 & \ddots \\ -4 & 16 & -4 & \ddots & 0 \\ 0 & -4 & \ddots & -4 & 0 \\ 0 & \ddots & -4 & 16 & -4 \\ \ddots & 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

e

$$D_s = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & -4 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 4 & 0 \\ \ddots & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

A matriz B de dimensão $n^2 \times n^2$, em blocos $n \times n$, possui a forma

$$B = \begin{pmatrix} Db_1 & Db_s & 0 & 0 & \ddots \\ Db_s & Db_2 & Db_s & \ddots & 0 \\ 0 & Db_s & \ddots & Db_s & 0 \\ 0 & \ddots & Db_s & Db_2 & Db_s \\ \ddots & 0 & 0 & Db_s & Db_1 \end{pmatrix}.$$

Os blocos Db_1 e Db_2 e o bloco subdiagonal Db_s possuem a forma

$$Db_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \ddots \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ \ddots & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$D_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, temos o sistema linear $C \cdot T = F$, sendo a matriz $C = \frac{k}{4}A + \frac{\alpha}{6}hB$, onde h é o tamanho do subintervalo na malha (utilizamos subintervalos de tamanhos iguais).

A matriz (vetor) F de ordem $n^2 \times 1$ toma a forma

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_i \\ \vdots \\ F_i \\ F_2 \end{pmatrix}.$$

Sendo os vetores blocos iguais a

$$F_1 = \begin{pmatrix} \beta h + \frac{qh^2k}{6} \\ \beta h + 3\frac{qh^2k}{6} \\ \vdots \\ \beta h + 3\frac{qh^2k}{6} \\ \beta h + 2\frac{qh^2k}{6} \end{pmatrix}, F_i = \begin{pmatrix} \beta h + 3\frac{qh^2k}{6} \\ 6\frac{qh^2k}{6} \\ \vdots \\ 6\frac{qh^2k}{6} \\ \beta h + 3\frac{qh^2k}{6} \end{pmatrix}$$

e

$$F_2 = \begin{pmatrix} \beta h + 2\frac{qh^2k}{6} \\ \beta h + 3\frac{qh^2k}{6} \\ \vdots \\ \beta h + 3\frac{qh^2k}{6} \\ \beta h + \frac{qh^2k}{6} \end{pmatrix}.$$

Em nossas simulações utilizamos as constantes, β , k e q com valores iguais a (1). Na figura (3), temos uma visualização da matriz C em uma malha de elementos finitos 10 x 10.

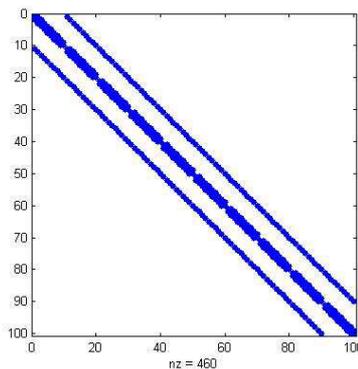


Figura 3: Matriz esparsa de dimensão 900 x 900 proveniente de malha de Elementos Finitos.

Mostramos na figura (4) a distribuição de temperatura em uma simulação com uma malha de Elementos Finitos 100 x 100.

Conclusões

Este trabalho apresentou estimativas a priori para o limite superior da distribuição de temperatura em problemas em regime permanente em corpos considerando dois tipos de dependência da condutividade térmica em função da temperatura. No primeiro, a condutividade térmica foi aproximada por uma função constante por partes da temperatura: $k = k_1 = \text{constante}$ para $T_0 < T$ ou $k = k_2 = \text{constante}$ para $T_0 \geq T$, onde T_0 é uma constante (Saldanha da Gama et al., 2013). No segundo tipo considerou-se uma dependência linear da condutividade térmica na temperatura: $k = (1 + \beta T)k_0$, sendo $k_0 > 0$ e β constantes (Saldanha da Gama et al., 2014). Em outras palavras, para as classes dos problemas considerados neste trabalho, é possível estabelecer, sem qualquer simulação (exata ou numérica) um valor que é maior que (ou igual a) temperatura em qualquer ponto do corpo.

Como as escolhas do conjunto Ω^* e da função Ψ influenciam as estimativas, eles devem ser escolhidos de modo a minimizar a diferença $\sup_{\Omega^*}[\Psi] - \inf_{\Omega^*}[\Psi]$, bem como $\sup_{\partial\Omega^*} \|\text{grad } \Psi\|$.

Em casos envolvendo condução de calor anisotrópica, a equação (4) perde a validade. No entanto, uma estimativa menos precisa pode ser obtida, considerando um problema virtual isotrópico, no qual k_1 e k_2 representam os menores autovalores dos tensores condutividade térmica \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 , respectivamente, em cada uma das faixas de temperatura consideradas.

Vale ressaltar, também que a utilização da transformada de Kirchoff foi de relevante importância para situações nas quais $k = k(T)$, isto é, condutividade térmica dependente da temperatura. Utilizamos a transformada em algumas simulações numéricas, permitindo trabalhar com diversos materiais, como o silício.

Referências

- [1] Alvarez-Quintana, J. Martínez, E., Pérez-Tijerina, E., Pérez-García, S. A. & Rodríguez-Viejo, J (2010) Temperature dependent thermal conductivity of polycrystalline ZnO films. *Journal of Applied Physics*, 107, 063713.1-063713.4.
- [2] Arpaci, V.S. (1966) *Conduction Heat Transfer*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.
- [3] Geseley, G., Linsmeieryx, J., Drachy, V. Frickey, J. & Arens-Fischerz, R. (1997) Temperature-dependent thermal conductivity of porous silicon, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 30, 2911–2916.
- [4] Hone, J., Whitney, M., Piskoti, C. & Zettl, A. (1999) Thermal conductivity of single-walled carbon nanotubes. *Physical Review B*, 59/4, 0163-1829/99/59(4)/2514(3).
- [5] Incropera, F. & Dewitt, P.D. (1996) *Introduction to Heat Transfer*. 3rd edition, John Wiley&Sons, New York.
- [6] Kim, S. (2001) A simple direct estimation of temperature-dependent thermal conductivity with Kirchhoff transformation *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 28 (4), 537-544.
- [7] Moitsheki, R.J., Hayat, T. & Malik, M.Y. (2010) Some exact solutions for a fin problem with a power law temperature-dependent thermal conductivity. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 11, 3287-3294.
- [8] Okoya, S.S. & Ajadi, S. O (1999) Critical parameters for thermal conduction equations, *Mechanics Research Communications*, 26(3), pp. 363-370.
- [9] Osman, M. A. & Srivastava, D. (2001) Temperature dependence of the thermal conductivity of single-wall carbon nanotubes. *Nanotechnology*, 12, 21–24.

- [10] Saldanha da Gama, R.M. (1997) An easy procedure for solving steady-state conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions, *Mechanics Research Communications*, 24(2), 197-202.
- [11] Saldanha da Gama, R.M. (2000) An upper bound estimate for a class of conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 27(7), 955-964.
- [12] Saldanha da Gama, R.M., Corrêa, E.D. and Martins-Costa, M.L. 2013, “An upper bound for the steady-state temperature for a class of heat conduction problems wherein the thermal conductivity is temperature dependent”. *Int. J Engineering Science*, Vol.69, pp. 77-83.
- [13] Saldanha da Gama, R.M., Silva, W. F., Corrêa, E.D. and Martins-Costa, M.L. 2014, “An upper temperature bound for the steady-state conduction heat transfer problems with a linear relationship between temperature and conductivity”. *High Temperatures High Pressures*, Vol.43, pp. 55-68.
- [14] Slattery, J.C. (1999) *Advanced Transport Phenomena*. Cambridge University Press, USA.
- [15] Taylor, A.E. (1958) *Introduction to functional analysis*. Wiley Toppan, Tokyo.
- [16] Zain-ul-Abdein, M, Azeem, S. & Shah, S.M. (2012) Computational investigation of factors affecting thermal conductivity in a particulate filled composite using finite element method. *International Journal of Engineering Science*, 56, 86-98.

Apêndice A

Prova de Convexidade e Coercividade

1 Funcional

Temos o problema de minimização do seguinte funcional

$$I[\omega] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{grad}\omega \cdot k \text{ grad}\omega dV - \int_{\Omega} \dot{q}\omega dV + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} h(\omega - T_{\infty})^2 dS, \quad (1)$$

sendo k ($k > 0$) e \dot{q} funções prescritas, h é o coeficiente de transferência de calor (convecção) e T_{∞} é a temperatura do meio ambiente.

A primeira variação do funcional $I[\omega]$ fica

$$\delta I = \delta \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{grad}\omega \cdot k \text{ grad}\omega dV \right) - \delta \int_{\Omega} \dot{q}\omega dV + \delta \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} h(\omega - T_{\infty})^2 dS. \quad (2)$$

Desenvolvendo a primeira parcela dessa variação temos

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{grad}\omega \cdot k \text{ grad}\omega dV \right) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta(\text{grad}\omega \cdot k \text{ grad}\omega dV) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \delta \text{grad}\omega \cdot k \text{ grad}\omega + \text{grad}\omega \cdot k \delta \text{grad}\omega \} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ 2 \text{grad}\omega \cdot k \text{ grad}\delta\omega \} dV \\ &= \int_{\Omega} \{ \text{grad}\omega \cdot k \text{ grad}\delta\omega \} dV. \end{aligned}$$

Logo a variação do funcional é denotada por

$$\delta I = \int_{\Omega} \{ \text{grad}\omega \cdot k \text{ grad}\delta\omega \} dV - \int_{\Omega} \dot{q}\delta\omega dV + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} h\delta(\omega - T_{\infty})^2 dS, \quad (3)$$

onde $\delta\omega$ é uma variação admissível de ω .

Utilizando a primeira identidade de Green e tomando $\delta I = 0$, temos

$$\delta I = - \int_{\Omega} \{div(k \text{ grad}\omega) + \dot{q}\} \delta\omega dV + \int_{\partial\Omega} \{k \text{ grad}\omega \cdot \mathbf{n} + h(\omega - T_{\infty})\} \delta\omega dS = 0, \quad (4)$$

onde \mathbf{n} é a normal.

Sabendo que $\delta\omega$ é uma variação arbitrária, temos a seguinte equação de Euler-Lagrange

$$div(k \text{ grad}\omega) + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (5)$$

e as condições naturais de contorno

$$-k \text{ grad}\omega \cdot \mathbf{n} = h(\omega - T_{\infty}) \quad \text{em } \partial\Omega. \quad (6)$$

2 Convexidade

Supondo que a solução de $\delta I = 0$ exista, isto é, que existe um mínimo, provaremos que ele é único mostrando que o funcional é estritamente convexo. Devemos demonstrar que

$$I[t\omega_1 + (1-t)\omega_2] < tI[\omega_1] + (1-t)I[\omega_2], \quad (7)$$

com $t \in (0; 1)$ e $\omega_1 \neq \omega_2$ em $\bar{\Omega}$.

A inequação (7) é equivalente a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{grad}[t\omega_1 + (1-t)\omega_2] \cdot k \text{ grad}[t\omega_1 + (1-t)\omega_2] dV - \int_{\Omega} \dot{q}[t\omega_1 + (1-t)\omega_2] dV + \\ & \quad \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} h([t\omega_1 + (1-t)\omega_2] - T_{\infty})^2 dS < \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{t \text{ grad}\omega_1 \cdot k \text{ grad}\omega_1 + (1-t) \text{ grad}\omega_2 \cdot k \text{ grad}\omega_2\} dV - \int_{\Omega} \{t\dot{q}\omega_1 + (1-t)\dot{q}\omega_2\} dV + \\ & \quad \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{1}{2} h t (\omega_1 - T_{\infty})^2 + \frac{1}{2} h (1-t) (\omega_2 - T_{\infty})^2 \right\} dS, \end{aligned}$$

que, ao eliminar os termos lineares, ficamos com

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{grad}[t\omega_1 + (1-t)\omega_2] \cdot k \text{ grad}[t\omega_1 + (1-t)\omega_2] dV + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} h ([t\omega_1 + (1-t)\omega_2] - T_{\infty})^2 dS < \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{t \text{ grad}\omega_1 \cdot k \text{ grad}\omega_1 + (1-t) \text{ grad}\omega_2 \cdot k \text{ grad}\omega_2\} dV + \\ & \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{1}{2} h t (\omega_1 - T_{\infty})^2 + \frac{1}{2} h (1-t) (\omega_2 - T_{\infty})^2 \right\} dS. \end{aligned}$$

E agrupando os termos da inequação, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ [t \text{ grad}\omega_1 \cdot k \text{ grad}\omega_1 + (1-t) \text{ grad}\omega_2 \cdot k \text{ grad}\omega_2] - \\ & \text{ grad}[t\omega_1 + (1-t)\omega_2] \cdot k \text{ grad}[t\omega_1 + (1-t)\omega_2] \} dV \\ & + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} h \{ t (\omega_1 - T_{\infty})^2 + (1-t) (\omega_2 - T_{\infty})^2 - [(t\omega_1 + (1-t)\omega_2) - T_{\infty}]^2 \} dS > 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Na primeira parcela da inequação anterior, o termo pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} & t \text{ grad}\omega_1 \cdot k \text{ grad}\omega_1 + (1-t) \text{ grad}\omega_2 \cdot \text{ grad}\omega_2 - \text{ grad}(t\omega_1 + (1-t)\omega_2) \cdot k \text{ grad}(t\omega_1 + (1-t)\omega_2) \\ & = t \text{ grad}\omega_1 \cdot k \text{ grad}\omega_1 + (1-t) \text{ grad}\omega_2 \cdot \text{ grad}\omega_2 - \\ & \text{ grad}(\omega_2 + t(\omega_1 - \omega_2)) \cdot k \text{ grad}(\omega_2 + t(\omega_1 - \omega_2)) \\ & = t \text{ grad}\omega_1 \cdot k \text{ grad}\omega_1 + (1-t) \text{ grad}\omega_2 \cdot \text{ grad}\omega_2 - \text{ grad}\omega_2 \cdot k \text{ grad}\omega_2 - \\ & 2t \text{ grad}\omega_2 \cdot k \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2) - t^2 \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2) \cdot k \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2) \\ & = t \text{ grad}\omega_1 \cdot k \text{ grad}\omega_1 - t \text{ grad}\omega_2 \cdot \text{ grad}\omega_2 - 2t \text{ grad}\omega_2 \cdot k \text{ grad}\omega_1 + 2t \text{ grad}\omega_2 \cdot k \text{ grad}\omega_2 - \\ & t^2 \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2) \cdot k \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2) \\ & = t \text{ grad}\omega_1 \cdot k \omega_1 - 2t \text{ grad}\omega_2 \cdot k \text{ grad}\omega_1 + t \text{ grad}\omega_2 \cdot k \text{ grad}\omega_2 - \\ & t^2 \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2) \cdot k \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2) \\ & = t \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2) \cdot k \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2) - t^2 \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2) \cdot k \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2) \\ & = t(1-t) \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2) \cdot k \text{ grad}(\omega_1 - \omega_2). \end{aligned}$$

E o termo da segunda parcela pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
& t(\omega_1 - T_\infty)^2 + (1-t)(\omega_2 - T_\infty)^2 - [(t\omega_1 + (1-t)\omega_2) - T_\infty]^2 \\
&= t\omega_1^2 + t\omega_2^2 - t^2\omega_1^2 - t^2\omega_2^2 - 2t\omega_1\omega_2 + 2t^2\omega_1\omega_2 \\
&= t(\omega_1 - \omega_2)^2 - t^2(\omega_1 - \omega_2)^2 \\
&= (t - t^2)(\omega_1 - \omega_2)^2 \\
&= t(1-t)(\omega_1 - \omega_2)^2.
\end{aligned}$$

Logo, a inequação fica

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \{t(1-t) \text{grad}(\omega_1 - \omega_2) \cdot k \text{grad}(\omega_1 - \omega_2)\} dV + \frac{1}{2} h \int_{\partial\Omega} \{t(1-t)(\omega_1 - \omega_2)^2\} dS > 0. \quad (9)$$

Temos nessa desigualdade, o primeiro termo quadrático em $\text{grad}(\omega_1 - \omega_2)$ e o segundo termo positivo.

Vamos supor que o lado esquerdo da inequação (9) seja nulo. Para isso acontecer, devemos ter $\omega_1 \equiv \omega_2 + a$ em Ω , sendo a uma constante, e $\omega_1 \equiv \omega_2$ sobre $\partial\Omega$. Para satisfazer essas duas últimas condições devemos, também, ter $\omega_1 \equiv \omega_2$ em $\bar{\Omega}$. Dessa forma, o lado esquerdo da inequação (9) nunca se anula para $\omega_1 \neq \omega_2$ em $\bar{\Omega}$ e, conseqüentemente o funcional se torna estritamente convexo.

Daí, se existe a solução de $\delta I = 0$, ela é única e representa um mínimo, que é a solução das equações de Euler-Lagrange (5) e condições de contorno (6).

3 Coercividade

Para garantirmos a existência da solução (existência de ω que minimiza I), é suficiente mostrar que I é um funcional coercivo. Para demonstrarmos a coercividade do funcional, devemos ter

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(\frac{I[\gamma\omega]}{\gamma} \right) = +\infty. \quad (10)$$

Para efeito de coercividade, tomamos $\|\omega\| = 1$, com $\omega \in H^1(\Omega)$.

Sabendo que nosso funcional possui a forma

$$I[\omega] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{grad}\omega \cdot k \text{ grad}\omega dV - \int_{\Omega} \dot{q}\omega dV + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} h(\omega - T_{\infty})^2 dS,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} I[\gamma\omega] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{grad}\gamma\omega \cdot k \text{ grad}\gamma\omega dV - \int_{\Omega} \dot{q}\gamma\omega dV + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} h(\gamma\omega - T_{\infty})^2 dS \\ &= \frac{\gamma^2}{2} \int_{\Omega} \text{grad}\omega \cdot k \text{ grad}\omega dV - \gamma \int_{\Omega} \dot{q}\omega dV + \gamma^2 \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} h\left(\omega - \frac{T_{\infty}}{\gamma}\right)^2 dS. \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{I[\gamma\omega]}{\gamma} = \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} \text{grad}\omega \cdot k \text{ grad}\omega dV - \int_{\Omega} \dot{q}\omega dV + \gamma \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} h\left(\omega - \frac{T_{\infty}}{\gamma}\right)^2 dS. \quad (11)$$

Temos que

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} \text{grad}\omega \cdot k \text{ grad}\omega dV \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \omega \neq \text{cte.} \\ 0, & \text{se } \omega = \text{cte.} \end{cases}$$

e

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(\gamma \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} h\left(\omega - \frac{T_{\infty}}{\gamma}\right)^2 dS \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \omega \neq 0 \text{ em } \partial\Omega \\ 0, & \text{se } \omega \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases},$$

então teremos

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(\frac{I[\gamma\omega]}{\gamma} \right) = +\infty, \quad (12)$$

dado que o segundo termo de (11) é constante e seu limite é limitado.

O resultado que chegamos, juntamente com a comprovação de continuidade e convexidade do funcional, nos garante a existência da solução do nosso problema de minimização.

Apêndice B

Simulação – código (m-file)

```

function intl=kirc5
% Elementos finitos numa malha retangular com elementos triangulares
lineares
% retangulo N x M (N linhas e M colunas) c/teste de conservacao de
energia
% integral de linha (alpha T - beta)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Equacoes diferenciais
% div(k.gradT)+q=0 em \Omega
% -k-gradT.n=h(T-T_\infty) em \partial \Omega
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Funcional
% I[T]=\frac{1}{2} \int_{\Omega} k \nabla\{T\} \cdot \nabla\{T\} dA -
% \int_{\Omega} \dot{q} T dA + \int_{\partial \Omega}
% \left(\frac{\alpha}{2} T^2 - \beta T \right) dL
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% K(T) - condutividade termica constante por partes
% Transformacao de Kirchoff - w=\sum_0^T K(\xi) d\xi
% K=K1 se T>T0
% K=K2 se T<=T0
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Montagem das matrizes e resolucao do sistemas linear p/min funcional
% Sistema Linear (k/4 * A + alpha/6 * B ) * T = F
% malha de dimensoes a x b.
% h e k - passos na malha
% q - taxa de geracao interna de calor
% alpha - constante
% beta[i] - variavel
% beta(i)=alpha* w(i)-
% ho*(w(i)*(1/(2*K1)+1/(2*K2))+abs(w(i))*(1/(2*K1)-1/(2*K2))+T0 - Ti);
% gamma - funcao nao negativa - efeito da fontes externas de radiacao
% sigma - constante de Stefan-Boltzman
% tol - tolerancia
% maxi - numero maximo de iteracoes
% cont - contador
% intl - valor da integral de linha
a=1;
b=1;
% c=-10;
% d=1000;
M=80;
N=80;
q=10;
h=a/(N-1);
k=b/(M-1);
alpha=80;
beta=ones(N^2,1);
K=1;
K1=6;
K2=6;
T0=10;
T=zeros(N^2,1);

```

```

sigma=1;
gamma=1;
qn=q*(h^2)*1/6; % termo do q no vetor F
% valor inicial das matrizes
A=zeros(N^2,M^2);
B=zeros(N^2,M^2);
F=zeros(N^2,1);
ho=1;
Ti=0;
% Montando a matriz A
% Primeiro bloco diagonal
A(1,1)=4;
A(N,N)=4;
for i = 2 : N-1
    A(i,i)=8;
end
for i = 1 : N-1
    A(i,i+1)=-2;
end
% parte simetrica
for i = 2 : N
    A(i,i-1)=-2;
end
% Ultimo bloco diagonal
A(N^2 - N + 1,N^2 - N + 1)=4;
A(N^2,N^2)=4;
for i = N^2 - N + 2 : N^2 - 1
    A(i,i)=8;
end
for i = N^2 - N + 1 : N^2-1
    A(i,i+1)=-2;
end
% parte simetrica
for i = N^2 - N + 2 : N^2
    A(i,i-1)=-2;
end
% Blocos intermediarios da diagonal
for i = 1 : N-2
    A(N*i + 1,N*i + 1)=8; %inicio do bloco
    A(N*i + 1,N*i + 2)=-4; % subdiagonal
    A(N*(i+1),N*(i+1))=8; % termino do bloco
    for j = 1 : N-2
        A(N*i + 1 + j, N*i + 1 + j)=16; % meio da diagonal do bloco
        A(N*i + 1 + j, N*i + 2 + j)=-4; %subdiagonal
    % parte simetrica
    for s = 2 : N
        A(N*i + s , N*i + s -1 )=-4; %subdiagonal
    end
    end
end
% Blocos subdiagonal
for i = 1 : N^2 - N
    A(i , N + i)=-4;
    A(N + i , i)=-4; % parte simetrica
    if mod(i,N)==0
        A(i , N + i)=-2;
        A(i - N + 1 , i + 1)=-2;
        A(N + i, i)=-2; % parte simetrica
        A(i+1, i - N + 1)=-2; % parte simetrica
    end
end
end

```

```

% parte simetrica do bloco subdiagonal
%spy(A)
% Montando a matriz B
% Primeiro bloco diagonal
for i = 1 : N
    B(i,i)=4;
end
for i = 1 : N-1
    B(i,i+1)=1;
end
% parte simetrica
for i = 2 : N
    B(i,i-1)=1;
end
% Ultimo bloco diagonal
for i = N^2 - N + 1 : N^2
    B(i,i)=4;
end
for i = N^2 - N + 1 : N^2-1
    B(i,i+1)=1;
end
% parte simetrica
for i = N^2 - N + 2 : N^2
    B(i,i-1)=1;
end
% Blocos intermediarios da diagonal
for i = 1 : N-2
    B(N*i + 1,N*i + 1)=4; %inicio do bloco
    B(N*(i+1),N*(i+1))=4; % termino do bloco
end
% Blocos subdiagonal
for i = 1 : N^2 - N
    if mod(i,N)==0
        B(i , N + i)=1;
        B(i - N + 1 , i + 1)=1;
        B(N + i, i)=1; % parte simetrica
        B(i+1, i - N + 1)=1; % parte simetrica
    end
end
% parte simetrica do bloco subdiagonal
%spy(B)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Resolvendo sequencia de funcional - variacão do beta
for m = 1 : 7
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Montagem do vetor F
    % primeiro bloco e ultimo bloco
    F(1,1)= beta(1,1)*h + qn;
    F(N^2,1)=beta(N^2,1)*h +qn;
    F(N,1)=beta(N,1)*h +2*qn;
    F(N^2-N+1,1)=beta(N^2-N+1,1)*h + 2*qn;
    for i = 2 : N-1
        F(i,1)=beta(i,1)*h +3*qn;
        F(N^2 - N + i,1)=beta(N^2-N+i,1)*h +3*qn;
    end
    % blocos intermediarios
    for i = N+1 : N^2 - N
        %beta(i,1)=0;
        F(i,1)=6*qn;
        if mod(i,N)==0

```

```

        F(i,1)=beta(i,1)*h +3*qn;
        F(i-N+1,1)=beta(i-N+1,1)*h +3*qn;
    end
end
%spy(F)
% Resolvendo o sistema utilizando inversa
C=1/4 * A + alpha/6 * h * B;
%spy(C)
%R=cholinc(C,1e-3);
%M=diag(diag(C));
%Minv=inv(M);
R=cholinc(sparse(C),0);
%spy(C)
%w=inv(C)*F;
[w,flag,relres,iter]=pcg(C,F,1e-8,200,R',R);
relres
iter
%spy(w)
% Ajustando as temperaturas dos nós na malha NxN
wn=zeros(N,N);
cont=0;
for i = 1 : N
    for j = 1 : N
        cont=cont+1;
        wn(i,j) = w(cont,1);
    end
end

for i = 1 : N
    beta(i,1)=alpha* w(i,1)-
ho*(w(i,1)*(1/(2*K1)+1/(2*K2))+abs(w(i,1))*(1/(2*K1)-1/(2*K2))+T0 -
Ti);
    beta((N-1)*N + i,1)=alpha* w((N-1)*N + i,1)- ho*(w((N-1)*N +
i,1)*(1/(2*K1)+1/(2*K2))+abs(w((N-1)*N + i,1))*(1/(2*K1)-1/(2*K2))+T0
- Ti );
end
for i = 1 : (N-2)
    beta(i*N + 1,1)=alpha* w(i*N + 1,1)- ho*(w(i*N +
1,1)*(1/(2*K1)+1/(2*K2))+abs(w(i*N + 1,1))*(1/(2*K1)-1/(2*K2))+T0 -
Ti);
    beta((i+1)*N,1)=alpha* w((i+1)*N,1)-
ho*(w((i+1)*N,1)*(1/(2*K1)+1/(2*K2))+abs(w((i+1)*N,1))*(1/(2*K1)-
1/(2*K2))+T0 - Ti);
end
% Calculando integral de linha (termo C na formulacao)
il=0;
ill=0;
for i = 1: N
    il= il+ alpha*h*(w(i,1) + w((N-1)*N+i,1));
end
for i = 1 : (N-2)
    il= il+ alpha*h*(w(i*N+1,1) + w((i+1)*N,1));
end
for i = 1 : N
    ill= ill+ h*(beta(i,1)+beta((N-1)*N+i,1));
end
for i = 1 : (N-2)
    ill= ill + h*(beta(i*N+1,1)+beta((i+1)*N,1));
end
intl= il-ill
% Reformando os valores de T

```

```
Tn=zeros(N,N);
cont=0;
end
%T
%spy(C)
for i = 1 : N
    for j = 1 : N
        cont=cont+1;

Tn(i,j)=w(cont,1)*(1/(2*K1)+1/(2*K2))+abs(w(cont,1))*(1/(2*K1)-
1/(2*K2))+T0 ;
        end
    end
end
mesh(Tn)
axis([0 80 0 80 5 28])
Tn(1,25)
Tn(25,1)
Tn(50,25)
Tn(25,50)
```