



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciência

Faculdade de Engenharia

José Julio Pedrosa Filho

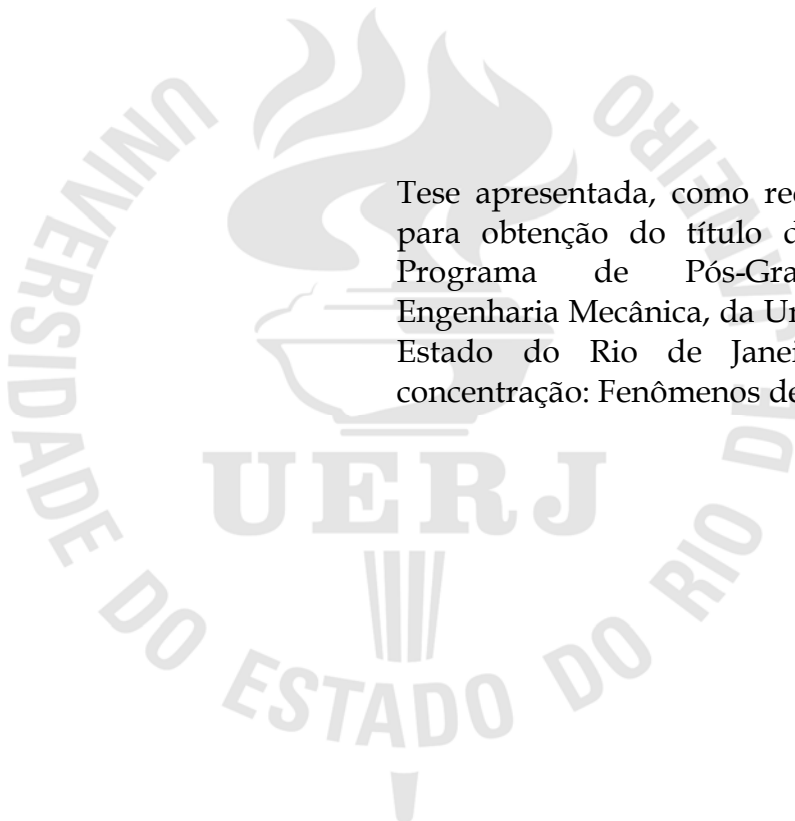
**Um modelo Físico-Matemático para escoamentos em meios porosos
com transição insaturado-saturado**

Rio de Janeiro

2013

José Julio Pedrosa Filho

Um modelo Físico-Matemático para escoamentos em meios porosos com transição insaturado-saturado



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama

Coorientador: Prof. Dr. Felipe Acker

Rio de Janeiro

2013

José Julio Pedrosa Filho

Um modelo Físico-Matemático para escoamentos em meios porosos com transição insaturado-saturado

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Aprovado em: 4 de junho de 2013.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama (Orientador)
Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. Felipe Acker (Coorientador)
Instituto de Matemática - UFRJ

Prof. Dr. Carlos Antônio de Moura
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Ivan Costa da Cunha Lima
Instituto de Física - UERJ

Prof.^a Dr.^a Maria Laura Martins Costa
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Felipe Bastos de Freitas Rachid
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2013

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

P372 Pedrosa Filho, José Julio.
Um modelo físico-matemático para escoamentos em meios porosos com transição insaturado-saturado / José Julio Pedrosa Filho. - 2013.
92 f.

Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama.
Coorientador: Felipe Acker.
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Mecânica. 2. Escoamento em meio poroso - Teses. I. Gama, Rogério Martins Saldanha da. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Título.

CDU 621:519.87

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

DEDICATÓRIA

Ao meu pai José Julio Pedrosa,
à minha avó Iracema França Pedrosa
e ao meu filho Erik Nigri Pedrosa.

AGRADECIMENTOS

À toda minha família e em especial à Michelle Nigri e Marina Nigri pela compreensão e estímulo.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UERJ.

Ao meu orientador Rogério Gama e co-orientador Felipe Acker, pelo incentivo e confiança ao longo do trabalho.

Aos professores membros da banca: Carlos Antônio de Moura, Ivan Costa da Cunha Lima, Felipe Bastos de Freitas Rachid e Maria Laura Martins Costa, por aceitarem o convite, ajudando a engrandecer este trabalho.

À Escola Naval, que me concedeu licença e forneceu todo apoio à conclusão desta tese.

Aos meus colegas do Departamento de Análise Matemática do Instituto de Matemática e Estatística, pelo apoio e licença concedida.

Mathematicians, or people who have very mathematical minds, are often led astray when “studying” physics because they lose sight of the physics. They say: “Look, these differential equations – the Maxwell equations – are all there is to electrodynamics. The equations are complicated, but after all they are only mathematical equations and if I understand them mathematically inside out, I will understand the physics inside out.” Only it doesn’t work that way. Mathematicians who study physics with that point of view – and there have been many of them – usually make little contribution to physics and, in fact, little to mathematics.

Richard Philips Feynman

RESUMO

PEDROSA F., José Julio *Um modelo Físico-Matemático para escoamentos em meios porosos com transição insaturado-saturado*. 2013. 92f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

Neste trabalho é apresentada uma nova modelagem matemática para a descrição do escoamento de um líquido incompressível através de um meio poroso rígido homogêneo e isotrópico, a partir do ponto de vista da Teoria Contínua de Misturas. O fenômeno é tratado como o movimento de uma mistura composta por três constituintes contínuos: o primeiro representando a matriz porosa, o segundo representando o líquido e o terceiro representando um gás de baixíssima densidade. O modelo proposto possibilita uma descrição matemática realista do fenômeno de transição insaturado/saturado a partir de uma combinação entre um sistema de equações diferenciais parciais e uma desigualdade. A desigualdade representa uma limitação geométrica oriunda da incompressibilidade do líquido e da rigidez do meio poroso. Alguns casos particulares são simulados e os resultados comparados com resultados clássicos, mostrando as consequências de não levar em conta as restrições inerentes ao problema.

Palavras-chave: Escoamento em meio poroso; Transição insaturado-saturado; Problema de Riemann com restrição; Teoria contínua de misturas.

ABSTRACT

This work is concerned with a new mathematical modelling for describing the flow of an incompressible fluid (a liquid) through a rigid, homogeneous and isotropic porous medium, from a Continuum Mixtures point of view. The phenomenon is regarded as the motion of a mixture composed by three overlapping continuous constituents: the first one representing the porous matrix, the second one representing the liquid and the third one representing a (very) low density gas. The proposed mathematical modelling allows a realistic mathematical description for the unsaturated/saturated transition process by means of a combination between a system of partial differential equations and an inequality. This inequality represents a geometrical constraint arising from the liquid incompressibility merged with the porous matrix rigidity. The simulation of some interesting particular cases is carried out presenting a comparison between the obtained results and the classical ones, showing the consequences of disregarding the constraints associated to the phenomenon.

Keywords: Flow through porous media; Transition unsaturated-saturated; Constrained Riemann problem; Continuum mixture theory.

LISTA DE SÍMBOLOS

φ	Fração de fluido
ε	Porosidade
v	Velocidade
p	Pressão
ρ	Densidade
\mathbf{C}_k	k-ésimo constituinte/componente da mistura
A	Região ($\subset \mathbb{R}^3$)
X	posição na configuração de referência
x	posição na configuração de espacial
P	Momento Linear
$\frac{D}{Dt}$	Derivada material
R_k	Região material do k-ésimo constituinte da mistura
\mathbf{G}^k	Força de corpo
H^k	Força de interação entre os constituintes
\mathbf{T}^k	Tensor parcial de tensões
τ	Torque
L	Momento angular
$[f]$	Varição de f
u	Velocidade da superfície de interface
R	Invariante de Riemann

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
	Revisão Bibliográfica	15
1	FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE TEORIA DE MISTURA	19
1.1	Conceitos Básicos	20
1.2	Conservação de Massa	26
1.3	Equação do Momento Linear	28
1.4	Equação do Momento Angular	32
1.5	Condições de Salto	35
2	MODELO MECÂNICO	40
3	O PROBLEMA DE RIEMANN ASSOCIADO AO ESCOAMENTO EM MEIO POROSO	47
4	A TRANSIÇÃO INSATURADO - SATURADO	58
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
	REFERÊNCIAS	66
	APÊNDICE A - Continuidade da Densidade	68
	APÊNDICE B - A Substituição $\xi = x/t$ em Leis de Conservação	69
	APÊNDICE C - O Esquema de Glimm	71
	ANEXO A - Trabalho publicado no Zamm	77

INTRODUÇÃO

Escoamentos através de meios porosos estão presentes em uma infinidade de situações como, por exemplo, quando um solo arenoso é atingido por uma chuva ou por uma certa quantidade de líquido proveniente de algum reservatório (por exemplo, um caminhão tanque acidentado) rompido.

As linhas de trajetória (e as linhas de corrente) nesses escoamentos são curvas extremamente complexas e, na maioria dos casos, impossíveis de serem determinadas com o ferramental usual. Em outras palavras, a descrição do movimento de um líquido no interior de um meio poroso, sob o ponto de vista da mecânica dos fluidos clássica, é impraticável. Mesmo que fossem conhecidas as fronteiras entre a região sólida (chamada de matriz porosa) e o líquido, sua complexidade geométrica impediria qualquer descrição local à luz da Mecânica dos Meios Contínuos. Mais especificamente, não haveria como aplicar condições de contorno do tipo “não deslizamento” por não se saber sequer onde estaria o contorno.

Devido aos aspectos acima mencionados e à necessidade de se construir descrições locais, com alguma precisão, uma das opções para estudar um escoamento através de um meio poroso é empregar a Teoria Contínua de Misturas [5], que consiste numa generalização da Mecânica dos Meios Contínuos, onde os materiais originalmente tratados como corpos contínuos passam a ser vistos como constituintes de uma mistura, coexistindo superpostos numa mesma região espacial.

Basicamente, na Teoria Contínua de Misturas, cada meio contínuo (líquido, sólido, ...) é representado por um constituinte contínuo que ocupa toda a região da mistura. Os constituintes são dotados de cinemática independente, de tal forma que a um dado ponto não podemos mais associar uma única velocidade, e sim uma velocidade para cada constituinte. Especificamente falando, há várias configurações de referência (uma para cada constituinte) e apenas uma configuração atual.

No caso de escoamentos através de meios porosos, sob o ponto de vista da Teoria de Misturas, trabalharemos com três constituintes: o sólido – representando a

matriz porosa, o líquido – representando o objeto principal de estudo e um gás inerte – considerado para prover alguma compressibilidade ao sistema.

O fenômeno em foco neste trabalho é o escoamento de um líquido através de um meio poroso, com transição saturado/insaturado.

Mais especificamente, consideraremos uma matriz porosa rígida, homogênea, isotrópica e em repouso através da qual escoar um líquido cuja densidade, enquanto contínuo, é constante.

Enquanto o escoamento se processar sem que o líquido preencha todos os poros (poros ativos – aqueles que se interconectam e pelos quais há escoamento) ele é dito um escoamento insaturado. Quando o líquido (visto como contínuo) ocupar todo o volume dos poros, teremos um escoamento saturado.

Levando em conta a incompressibilidade do líquido (contínuo clássico) e do meio poroso, há um limite físico/geométrico para a quantidade de líquido admissível em cada parte da matriz porosa. Em outras palavras, este é um problema sujeito a uma restrição que, até os dias de hoje, jamais foi matematicamente considerado em descrições locais na literatura clássica.

Em geral, ao simular problemas desse tipo, os autores ajustam as condições iniciais de forma a jamais violar os limites físicos inerentes ao fenômeno. Desta forma, se isentam da necessidade de trabalhar com restrições sobre as incógnitas.

Nesta Tese a contribuição principal é a apresentação de um modelo matemático que permite a simulação de um escoamento em meio poroso, com transição saturado/insaturado, independente de condição inicial. Em outras palavras, é apresentado um modelo realista sob quaisquer condições iniciais.

Além da metodologia a ser proposta, há também uma análise de resultados onde se vê o quanto a velocidade de propagação é incrementada com a saturação. Quando não se impõem limites para a quantidade de líquido nos poros, se observa situações envolvendo apenas baixas velocidades de propagação associadas a contextos onde a quantidade de líquido é maior do que o volume do poro que conteria esse líquido..

Neste trabalho nos restringimos a um contexto unidimensional onde os campos de velocidade v e de fração de fluido ϕ , incógnitas do problema, serão

funções de uma variável espacial (cartesiana retangular) e do tempo. Além destes, teremos um campo de pressões p que, nos escoamentos saturados, é uma função de φ . Aqui a pressão será suposta uma função linear de φ , enquanto não houver saturação.

Quando, por alguma razão, a fração de fluido φ iguala a porosidade ε , não se pode mais representar a pressão p a partir de uma relação constitutiva, uma vez que a restrição geométrica imposta pela rigidez da matriz porosa associada à incompressibilidade do líquido impõe a desigualdade $\varphi \leq \varepsilon$ em toda parte.

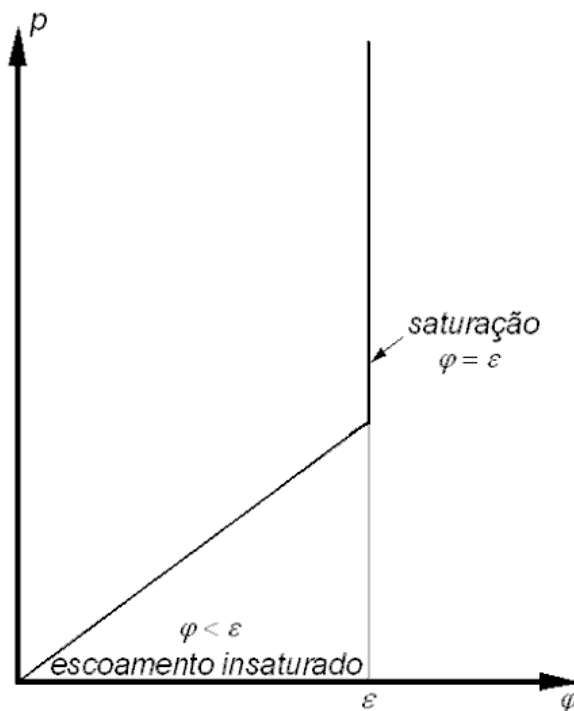


Gráfico do comportamento da fração de fluido com relação a pressão

Assim, será necessário trabalhar com um sistema de equações diferenciais parciais (hiperbólico e não linear) com uma incógnita limitada - $\varphi \leq \varepsilon$. Quando a saturação $\varphi = \varepsilon$ é atingida (e o modelo aqui proposto permite a descrição matemática da transição insaturado/saturado) a pressão p passa a ser uma incógnita independente no sistema de equações diferenciais, sendo obtida de forma independente da fração de fluido.

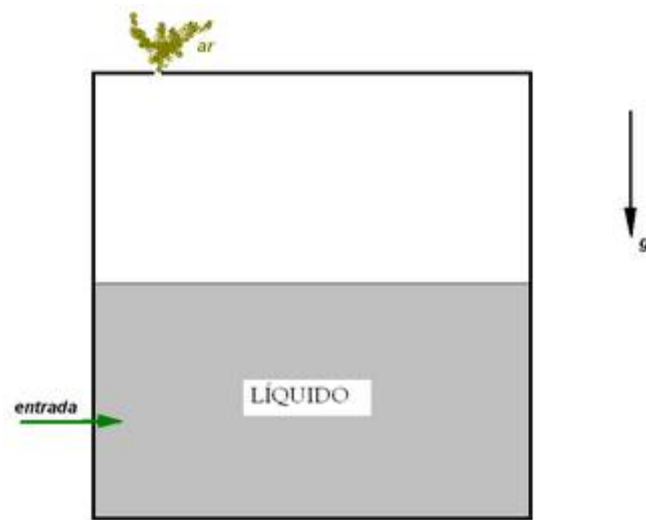
O que se encontra na literatura usual é esse sistema sem a restrição. Dessa forma, se não forem impostas condições iniciais especiais, teremos situações onde

$\varphi > \varepsilon$ que além de fisicamente absurdas dão origem a conclusões perigosas como, por exemplo, velocidades de propagação muito inferiores (em módulo) às reais e pressões bem menores que as reais. A consequência disso é uma simulação (meramente matemática) que pode sugerir um tempo muito grande para que uma certa região seja atingida por uma frente de choque e/ou uma pressão bem aquém daquela que seria suficiente para fraturar a matriz porosa.

Nos limitamos neste trabalho a simular problemas sujeitos a condições iniciais que permitam soluções analíticas. No entanto, podemos considerar condições iniciais quaisquer e empregar o esquema de Glimm para efetuar simulações.

É preciso chamar a atenção que, dos três constituintes envolvidos no processo, apenas o fluido (líquido) será objeto de análise específica. Em outras palavras, não serão abordadas equações de conservação para a matriz porosa e nem para o gás inerte. A matriz porosa, suposta rígida e em repouso, atende à equação da continuidade e, com uma escolha adequada para o tensor parcial de tensões, atende também à equação da quantidade de movimento linear. O gás inerte é considerado apenas para prover alguma compressibilidade para a mistura nos poros. Assim, supondo que sua densidade seja muitíssimo pequena, não é necessário se considerar equações de conservação para ele.

Antes de passar ao detalhamento teórico deste trabalho, levando em conta que temos também um compromisso didático, vamos considerar um problema clássico, e bastante simples, para ilustrar a contribuição deste texto. Consideremos um tanque (cubo) de volume $V = L^3$ (invariante no tempo) no qual é injetado um líquido com densidade ρ constante (notem a válvula de saída de ar no topo do tanque – só sai ar...).



Tanque com líquido de densidade constante

A pressão no fundo do tanque é dada por $p = p_0 + \rho gH$ onde H é a altura da coluna de líquido, enquanto $H < L$. Quando $H = L$ a pressão pode ter qualquer valor maior ou igual a $p_0 + \rho gL$ (visto que o tanque é rígido e por mais que se aumente a pressão não haverá um volume de líquido maior que o volume do tanque).

Esta idéia é generalizada neste trabalho. Aqui não temos uma restrição sobre uma variável, temos uma restrição sobre um campo que deve satisfazer (no sentido generalizado) um sistema de equações diferenciais parciais, hiperbólico e não linear.

Revisão Bibliográfica

O estudo de fenômenos de transporte em meios porosos data da década de 1920, de acordo com uma revisão de Alazmi e Vafai [1], comparando diferentes modelos para problemas complexos. No entanto, uma descrição adequada da transição de escoamentos saturados para insaturados através de meios porosos continua a ser um assunto em aberto.

Sistemas hiperbólicos com restrições podem estar presentes em diferentes aplicações, tais como escoamentos bifásicos, plasticidade compressível com choques e descrição de tráfego de veículos ou de multidões, incluindo os engarrafamentos, a presença de praças de pedágio e de previsão de acidentes de trânsito nas estradas. Bouchut et al. [2] discutem modelos de escoamentos bifásicos de gases e líquidos, para líquidos incompressíveis, com o objetivo de modelar a dinâmica de escoamentos em tubulações, um modelo de ordem zero proposto, que consiste em um sistema de duas leis de conservação ao qual é imposta uma restrição na fração volumétrica, que deve ser menor que a unidade. A metodologia proposta por Bouchut et al. [2] capta as fortes diferenças entre a dinâmica das regiões congestionadas e regiões livres, e permite determinar a sua transição. A restrição considerada por Bouchut et al. [2] é análoga à utilizada nesta tese. Comparando estes dois trabalhos, embora a abordagem apresentada por Bouchut et al. [2], pareça ser mais geral do que aquela utilizada nesta tese, é importante notar que, no teste trabalho um resultado original é apresentado: a solução exata para um Problema de Riemann não-linear com restrição. Rossmanith [3], emprega um método de volumes finitos de alta resolução, com base num método de propagação da ondas, para aproximar um sistema de equações magnetohidrodinâmicas hiperbólicas não lineares, satisfazendo uma restrição de divergência livre no campo magnético, sujeitas a ondas de choque e outras discontinuidades.

Modelos de fluxo de tráfego são normalmente inspirados por três categorias principais de modelos de mecânica dos fluidos: modelos de partículas, modelos cinéticos e modelos dinâmicos de fluidos. Esta última categoria é baseada em

equações de balanço de um certo número de características do escoamento, sendo geralmente descrita por modelos de primeira ou de segunda ordem.

Os modelos de primeira ordem supõem apenas a conservação do número de veículos, permitindo prever densidade; enquanto os modelos de segunda ordem, também levam em conta uma equação relacionada com a conservação do momentum, sendo capazes de prever também a velocidade de propagação - geralmente a velocidade média do escoamento, e originando modelos como as equações de Euler para a dinâmica dos gases. No entanto, estes modelos podem levar a um comportamento absurdo como veículos movendo-se para trás, apontado por Daganzo [4]. Aw e Rascle [5] propuseram um modelo - denominado modelo Aw-Rascle - a fim de corrigir esses problemas e garantir que a densidade e a velocidade permaneçam não negativas. Berthelin et al. [6] propuseram um modelo de fluxo de tráfego que descreve a formação e a dinâmica de engarrafamentos, constituídos por um sistema de dinâmica de gases (sem pressão) sob uma restrição máxima na densidade, em outras palavras, a restrição de densidade é preservada a qualquer momento. A dinâmica dos engarrafamentos - derivada usando um problema de Riemann associado ao modelo de Aw-Rascle, corresponde a regiões onde a restrição de densidade é atingida. A teoria matemática - prova de estabilidade fraca e existência de solução - é baseada nas equações isentrópicas da dinâmica dos gases com restrição unilateral sobre a densidade e a perda de massa desenvolvidas por Berthelin e Bouchut (ver [7] e referências nele contidos), que propõem uma formulação fraca incorporando os multiplicadores de Lagrange, que garantem a conservação do momentum.

O modelo de Berthelin et al. [6] consiste, essencialmente, na combinação com do sistema de de Euler com uma restrição de densidade máxima, assumindo que esta restrição é independente da velocidade. Posteriormente, Berthelin et al. [8] levaram em conta essa dependência, propondo um modelo de segunda ordem, também com base no modelo de Aw-Rascle [5]. Herty e Schleper [9], com o objetivo de prever os acidentes de trânsito, discutiram modelos matemáticos de previsão baseados numa descrição macroscópica do fluxo de trânsito. Essencialmente eles consideram propriedades matemáticas de um modelo macroscópico de tráfego de

segunda ordem juntamente com diferentes leis de pressão nas estradas conectadas.

Com o objetivo de modelar um pedágio em uma estrada, Colombo e Goatin [10] consideram uma única equação hiperbólica (problema de Cauchy) submetido a uma restrição unilateral local variável no fluxo, enquanto que nesta Tese um sistema de duas equações diferenciais parciais é considerado. O número total de veículos é conservado e a velocidade do tráfego é suposta uma função da densidade de tráfego. Empregando um procedimento matemático sofisticado, os autores provam que o problema está bem colocado e resolvem empregando uma solução de entropia com base em choques não clássicos. As soluções obtidas são coincidentes com os limites das soluções clássicas para leis de conservação adequadas, com funções de fluxos descontínuas que aproximam o problema restrito. É importante notar que o trabalho de Colombo e Goatin [10] considera uma restrição unilateral variável, que ocorre apenas no limite; enquanto nesta Tese, a restrição ocorre em todo o domínio e durante todo o tempo. Colombo et al. [11] além de estudar modelos de tráfego, também descrevem a dinâmica de fuga para multidões, com base em dois princípios: a conservação do número total de veículos e o fato da velocidade num dado ponto ser uma função da densidade nesse ponto; apresentando uma descrição rigorosa das restrições unilaterais sobre o escoamento observável.

Després et al. [12] observam que a importância de compreender as restrições na física matemática e desenvolver uma abordagem de equações diferenciais parciais não-lineares permanece um grande desafio até hoje. Estes autores apresentam uma estrutura matemática para soluções fracas com restrição de equações hiperbólicas, para modelar plasticidade compressível com choques, que dão origem a soluções descontínuas, baseadas em sistemas de Friedrichs com um convexo de restrição não-linear geral, provando que estas soluções fracas são únicas. O formalismo fraco desenvolvido permite representar tanto os critérios de plasticidade Tresca quanto aqueles de Von Mises.

Este trabalho apresenta um modelo matemático fisicamente realista para representar o enchimento de uma matriz porosa rígida não saturada por um fluido incompressível, identificando a transição de escoamento insaturado para saturado. O modelo mecânico usa uma abordagem da teoria de misturas [13, 14] - um método

conveniente para modelar sistemas multi-componentes – baseado numa teoria local termodinamicamente consistente que generaliza a Mecânica do Contínuo clássica [15]. O meio poroso insaturado é modelado como uma mistura de três componentes contínuos superpostos: um sólido (uma matriz porosa rígida, homogênea e isotrópica), um líquido (um fluido incompressível), e um gás inerte, suposto com densidade mássica muito baixa de massa, incluído para levar em conta a compressibilidade do sistema como um todo.

Saldanha da Gama [16] propôs uma relação constitutiva levando em conta um limite geométrico, que surge devido à da rigidez da matriz porosa e à incompressibilidade do fluido, evitando as soluções sem significado físico. Estas soluções corresponderiam a um valor infinito para a pressão em escoamentos saturados – quando a fracção de fluido tende à porosidade. No trabalho de Saldanha da Gama [16] a equação proposta impõe um comportamento físico que impede que o fluido sature a matriz porosa, enquanto nesta Tese o meio poroso pode efetivamente ser saturado pelo fluido. Martins-Costa e Saldanha da Gama [17] propuseram uma melhoria na relação constitutiva na pressão parcial de [16], na qual a restrição geométrica unilateral para a fracção de fluido, em vez de ser assumida em todo o domínio, é considerada apenas só numa vizinhança conveniente da porosidade (desde que a fracção de fluido seja menor do que a porosidade). Além disso, a relação [17] assegura a continuidade da pressão e de sua primeira derivada, permitindo assim o cálculo analítico das invariantes Riemann associados ao problema.

É importante observar que, nesta Tese, a restrição unilateral geométrica foi matematicamente imposta, assegurando que o valor máximo que a fracção de fluido pode alcançar é o valor de porosidade. Isso impõe um estado intermediário decorrente de uma restrição geométrica.

1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE TEORIA DE MISTURAS

A ferramenta que empregaremos para modelar o escoamento em meio poroso, será a Teoria Contínua de Misturas, que consiste em uma generalização da mecânica do contínuo. É recomendável o conhecimento de algumas noções de mecânica do contínuo, como em Spencer[22] e Chadwick[9], assim como um conhecimento básico de mecânica Newtoniana ([14], [12], [15]).

O emprego da mecânica dos fluidos clássica é inviável para resolução de nosso problema, pois ela consiste no cálculo em toda geometria dos poros, do movimento do fluido. Na teoria de Misturas, iremos adotar a hipótese do contínuo, e analisaremos a mecânica tanto da mistura quanto de cada constituinte isoladamente.

Neste capítulo, discutiremos os conceitos físicos e as equações de balanço que usaremos para modelar o problema associado ao escoamento em meio poroso. Não iremos tratar das equações de energia ou entropia. É importante ressaltar que faremos o desenvolvimento teórico apenas para o caso de uma mistura ideal, ou seja, em que os constituintes da mistura ocupam simultaneamente toda região da mistura. No meio poroso real e em algumas outras aplicações, esta hipótese não se aplica, pois se o meio poroso ocupasse todo espaço, não haveria poros, e o fluido se encontraria apenas nos poros, e não em toda região, no entanto o modelo ideal serve como uma aproximação dos casos reais.

1.1 CONCEITOS BÁSICOS

Uma mistura consiste de $N \geq 2$ constituintes contínuos em uma mesma região. Denotaremos o k -ésimo constituinte/componente da mistura por \mathcal{C}_k , e iremos nos referir a ele como componente- k . Adotaremos o modelo do contínuo para cada componente, isto é, cada constituinte pode ser dividido indefinidamente, mantendo suas propriedades. Iremos ainda supor que na mistura, pode haver uma superposição de constituintes em uma mesma posição.

A Física moderna nos diz que em escala microscópica, a matéria é descontínua, composta de partículas menores e freqüentemente de vazios. O modelo do contínuo pode ser interpretado como o caso limite em que se admite o tamanho das partículas “infinitamente pequeno”, que é uma boa aproximação para as aplicações em escala macroscópica.

Analisando a hipótese da superposição dos constituintes a luz da física moderna, o resultado seria que em uma determinada posição, recairíamos em um vazio, ou em uma partícula subatômica, que não possui propriedades de nenhum dos constituintes, portanto esta hipótese só fará sentido, admitindo-se o modelo do contínuo. Neste caso teremos que definir o que significa haver um constituinte \mathcal{C}_k em um determinado ponto. Um ponto não possui volume, portanto não podemos associar uma quantidade de matéria a ele. Porém, a idéia de haver um constituinte no ponto, corresponde a ele estar “rodeado” pelo constituinte. Diremos então que haverá o constituinte \mathcal{C}_k em um ponto, sempre que $\rho_k > 0$ com

$$\rho_k = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{m_k(\mathcal{A})}{V} \quad (1.1)$$

onde V é o volume de uma região \mathcal{A} , contendo o ponto, e m_k corresponde a massa de constituinte- k na região. Chamaremos ρ_k de densidade parcial do constituinte- k no ponto. Repare que (1.1) não corresponde a um limite na definição matemática, pois V não é variável da função m_k . Voltaremos a discutir a definição de densidade.

A superposição de constituintes, corresponde a em um dado ponto, haver vários constituintes distintos com seus respectivos $\rho_i > 0$. Em uma mistura de gases ou numa solução homogênea de líquidos, é natural aceitar que em cada ponto haverá uma densidade não nula para cada componente da mistura. Sabemos que esta aproximação só fará sentido no modelo do contínuo. Para meios porosos, esse modelo subentende os poros como sendo uma rede de “canais infinitesimais”, e cada vez menor os poros, melhor o modelo irá funcionar.

Cada constituinte terá movimento próprio:

$$\bar{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\chi}_k(\bar{\mathbf{X}}^k, t) \quad (1.2)$$

O movimento da mistura consistirá nas equações correspondentes ao movimento de cada constituinte:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{\chi}_1(\bar{\mathbf{X}}^1, t) \\ \bar{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{\chi}_2(\bar{\mathbf{X}}^2, t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dada uma região em torno de um ponto, a massa total contida na região será igual a soma das massas de cada constituinte.

$$M = \sum_K m_K \quad (1.3)$$

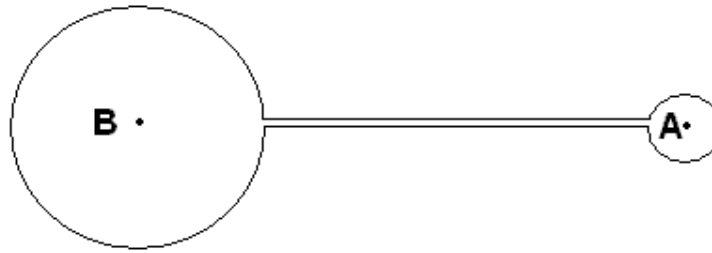
logo

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_K \boldsymbol{\rho}_K \quad (1.4)$$

A densidade possui a definição básica:

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M(\mathcal{A})}{V} \text{ ou } \rho = \frac{dM}{dV} \quad (1.5)$$

onde $M(\mathcal{A})$ corresponde a massa total (de mistura) contida na região \mathcal{A} . Uma inconsistência dessa definição é o fato que podemos ter o volume de uma região tendendo para zero, e a densidade tendendo para um valor distinto da densidade do ponto. (ver figura abaixo)



Região aberta contendo 2 pontos distantes

Se os 2 raios tenderem para zero (o raio em torno de A mais rapidamente), teremos uma região em torno de A , com volume tendendo para zero e densidade tendendo para o seu valor em B . (observe que o baricentro da figura tende para B).

Diremos então que a densidade em um ponto P vale ρ , sempre que: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } A \subset B(P, \delta) \Rightarrow \left| \frac{M(A)}{V(A)} - \rho \right| < \varepsilon$$

onde $B(P, \delta)$ corresponde a bola de centro P e raio δ , e A , uma região Jordan-mensurável (Apostol[2]). Usaremos esta definição ao longo do texto, portanto quando escrevermos dM/dV , subentende-se em uma bola suficientemente pequena. A partir desta definição, podemos concluir que se ρ é definido em um aberto B , então ρ é contínuo em B (apêndice A).

Uma relação que se observa, é:

$$\iiint_{\Omega} \rho dV = M(\Omega) \quad (1.6)$$

onde $M(\Omega)$ corresponde a massa limitada pela região Ω . Adotando-se a identidade (1.6) como definição alternativa de densidade, observamos que:

- 1- Não existe apenas uma função ρ satisfazendo (1.6), visto que alterando-se o valor de ε em um número finito de pontos (na verdade poderia ser um número infinito de pontos, como por exemplo, uma superfície que corta Ω) a identidade continuaria válida, e os novos valores não teriam significado físico nenhum.
- 2- Se quisermos uma função contínua que satisfaça (1.6), então teríamos apenas uma solução e ela coincidiria com a definição de densidade. No entanto, nem sempre haverá a tal função contínua (caso de uma interface entre 2 materiais distintos).

Vale notar que se existe a integral $\iiint_{\Omega} \rho dV$, pelo critério de integrabilidade de

Lebesgue, o conjunto dos pontos de descontinuidade da função possui medida nula ([4] e [2]), portando as 2 definições coincidirão quase sempre. O procedimento mais abstrato para se definir densidade, é considerar o volume como sendo a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^3 , e a massa como sendo uma medida qualquer. A densidade seria definida como sendo a derivada de Radon-Nikodym (Asplund[4]) da massa pelo volume (limite da razão entre as medidas), e mais uma vez $\rho = \frac{dM}{dV}$.

Associamos a cada constituinte uma velocidade \bar{v}^k em cada ponto,

$$\bar{v}^k = \frac{\partial \mathcal{X}_k}{\partial t} = \frac{D_k \bar{x}^k}{Dt} \quad (1.7)$$

dada pela derivada material da posição \bar{x}^k . Adotando como sistema todos os componentes contidos em uma "região infinitesimal" dA , teremos para velocidade do centro de massa do sistema:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\sum \bar{v}^k dm_k}{dM} \Rightarrow \bar{v} \frac{dM}{dV} = \sum \bar{v}^k \frac{dm_k}{dV} \Rightarrow \\ \bar{v} &= \frac{\sum \bar{v}^k \rho_k}{\rho} \end{aligned} \quad (1.8)$$

que chamaremos de velocidade baricêntrica¹. A velocidade baricêntrica é portanto um limite da velocidade do centro de massa, à medida que a região vai ficando cada vez menor. Vale observar que o momento linear de uma mistura contida em uma região Ω está associado à velocidade baricêntrica.

$$\bar{P} = \sum_k \iiint_{\Omega} \bar{v}^k \rho_k dV = \iiint_{\Omega} \sum_k \bar{v}^k \rho_k dV = \iiint_{\Omega} \bar{v} \rho dV$$

¹ O procedimento mais formal para se definir velocidade baricêntrica, seria usar uma região esférica e tomar o limite do seu raio tendendo para zero.

Para uma região infinitamente pequena teríamos:

$$d\bar{P} = \sum_k \bar{v}^k dm_k = \bar{v} dM$$

Chamaremos de velocidade de difusão (μ_k) de um componente C_k :

$$\bar{\mu}^k = \bar{v}^k - \bar{v} \quad (1.9)$$

ou seja, μ_k corresponde a velocidade do componente-k em relação ao centro de massa.

Proposição 1.1 $\sum \rho_k \bar{\mu}^k = \bar{0}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum \rho_k \bar{\mu}^k &= \sum \rho_k \bar{v}^k - \bar{v} \sum \rho_k = \\ &= \rho \bar{v} - \rho \bar{v} = \bar{0} \end{aligned}$$

que é uma relação intuitiva: o momento linear em relação ao centro de massa é zero.

Relembraremos agora algumas propriedades das derivadas materiais. Para um campo escalar $f(\bar{x}, t)$, a taxa de variação de f na direção de \bar{v}^k , ou seja, a medida que se acompanha o movimento do componente-k, será denotada por $\frac{D^k f}{Dt}$. Usando a regra da cadeia:

$$\frac{D^k f}{Dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{D^k x_i}{Dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla f \cdot \bar{v}^k + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.10)$$

Para um campo vetorial $\vec{f}(\bar{x}, t) = (f_1, f_2, f_3)$, vale a relação (1.9), para cada componente f_i logo:

$$\frac{D^k \vec{f}}{Dt} = \nabla \vec{f} \cdot \bar{v}^k + \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$$

onde $\nabla \vec{f}$ é o diferencial / derivada de Frechet do campo \vec{f} ([2]).

Em uma mistura, iremos definir $\frac{Df}{Dt}$ como a taxa de variação do campo, ao se deslocar com a velocidade baricêntrica. Ela não é uma derivada material

convencional, já que não se trata de uma taxa de variação que acompanha o movimento de algum constituinte ou corpo material. Pela regra da cadeia:

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, \frac{dt}{dt} \right)$$

$$\frac{Df}{Dt} = \nabla f \cdot \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.11)$$

analogamente, para campos vectoriais:

$$\frac{D\vec{f}}{Dt} = \nabla \vec{f} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \quad (1.12)$$

substituindo a eq. (1.9) em (1.10) obtemos

$$\frac{D^k f}{Dt} = \nabla f \cdot (\vec{v} + \vec{\mu}^k) + \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{D^k f}{Dt} = \nabla f \cdot \vec{\mu}^k + \frac{Df}{Dt}$$

analogamente, para campos vectoriais:

$$\Rightarrow \frac{D^k \vec{f}}{Dt} = \nabla \vec{f} \cdot \vec{\mu}^k + \frac{D\vec{f}}{Dt}$$

Multiplicando a eq. (1.10) por ρ_k , e substituindo (1.4) e (1.8) teremos:

$$\rho_k \frac{D^k f}{Dt} = \nabla f \cdot \rho_k \vec{v}^k + \rho_k \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\sum \rho_k \frac{D^k f}{Dt} = \nabla f \cdot \sum \rho_k \vec{v}^k + \frac{\partial f}{\partial t} \sum \rho_k \Rightarrow$$

$$\sum \rho_k \frac{D^k f}{Dt} = \nabla f \cdot \rho \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t} \rho = \rho \frac{Df}{Dt} \quad (1.13)$$

e no caso vetorial

$$\sum \rho_k \frac{D^k \vec{f}}{Dt} = \rho \frac{D\vec{f}}{Dt}$$

1.2 CONSERVAÇÃO DE MASSA

Não podemos falar de região material da mistura, pois cada constituinte possui sua própria velocidade, mas podemos tratar da região material de cada componente. Denotaremos por R_k a região material (região composta por um conjunto fixo de partículas) dos elementos do componente-k. Como estamos tratando apenas de misturas quimicamente inertes, não teremos componentes se combinando ou se transformando em outros. Neste caso, a massa total m_k de componente-k contida na região material R_k se mantém constante e sua derivada pelo tempo é nula.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \rho_k dV = 0$$

Proposição 1.2 (*equação da continuidade / conservação de massa*)

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \text{div}(\rho_k \bar{v}^k) = 0 \quad (1.14)$$

pelo teorema do transporte de Reynolds [3] teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \rho_k dV &= \iiint_{R_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} dV + \iint_{\partial R_k} \rho_k \bar{v}^k \cdot d\bar{A} = \\ &\iiint_{R_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \text{div}(\rho_k \bar{v}^k) \right) dV = 0 \end{aligned}$$

válido para qualquer região material, logo seu integrando tem que ser identicamente nulo.

somando (1.14) em k obtemos:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \sum \text{div}(\rho_k \bar{v}^k) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \sum \rho_k + \text{div} \sum (\rho_k \bar{v}^k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

que é a equação da continuidade para mistura.

Efetuada o divergente do produto na eq. (1.14), obtemos:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \bar{v}^k \cdot \nabla \rho_k + \rho_k \operatorname{div} \bar{v}^k = 0$$

portanto

$$\frac{D^k \rho_k}{Dt} + \rho_k \operatorname{div} \bar{v}^k = 0 \quad (1.16)$$

e para mistura

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad (1.17)$$

Observe que as relações (1.15) e (1.17), valem também para misturas que reagem quimicamente, visto que a taxa total de criação de massa é nula, teremos apenas que os componentes se transformam uns nos outros.

Proposição 1.3 Para cada constituinte \mathcal{C}_k , vale:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} f(\bar{x}, t) \rho_k dV = \iiint_{R_k} \frac{D^k f}{Dt} \rho_k dV \quad (1.18)$$

Pelo teorema do transporte de Reynolds

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{R_k} f(\bar{x}, t) \rho_k dV &= \iiint_{R_k} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \rho_k + f \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} (f \rho_k \bar{v}^k) \right) dV = \\ &= \iiint_{R_k} \left(\rho_k \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + f \operatorname{div} (\rho_k \bar{v}^k) + \rho_k \bar{v}^k \cdot \nabla f \right) dV = \end{aligned}$$

aplicando (1.14) teremos

$$= \iiint_{R_k} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v}^k \cdot \nabla f \right) \rho_k dV = \iiint_{R_k} \frac{D^k f}{Dt} \rho_k dV$$

A Proposição 1.3, possui a interpretação intuitiva informal:

$$\frac{d}{dt} \int_{R_k} f dm_k, \text{ que obviamente vale } \int_{R_k} \frac{Df}{Dt} dm_k$$

1.3 EQUAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

Para uma partícula², a força resultante vale a taxa de variação de seu momento linear. Como estamos tratando da força e do momento linear da partícula, e não de um ponto fixo no espaço, trata-se de uma derivada material, ou seja:

$$\frac{D\bar{P}^k}{Dt} = \bar{F}$$

onde \bar{F} é a força resultante na partícula, e $\bar{P}^k = \bar{v}^k \rho_k dV$ seu momento linear.

Mais uma vez, estamos tratando do caso em que os componentes da mistura são quimicamente inertes.

A força resultante será a soma de 3 componentes:

- Força de corpo (externa) ([22] e [9])
- Força de interação entre os constituintes
- Força de superfície (associada ao tensor de tensões de Cauchy) ([22] e [9])

A força externa de corpo, possui como principal exemplo o Peso que tem a forma $\bar{g} dm$ ou $\bar{g} \rho dV$. Generalizando, denotaremos por :

$$\bar{G}^k \rho_k dV$$

a força de corpo agindo sobre o componente C_k .

Para regiões infinitesimais em torno do mesmo ponto, a força de interação entre os constituintes, é proporcional ao dV , portanto, no ponto, a razão \bar{F} / dV é constante. A força de interação do componente-i sobre o componente-k será denotada então por :

$$\bar{H}_i^k dV$$

definindo: $\bar{H}^k = \sum_{i \neq k} \bar{H}_i^k$ teremos que a soma das forças de todos os demais

constituintes sobre o componente-k será:

² Entendendo como partícula, um corpo cuja posição pode ser descrita por um único ponto (Desloge[12]). Aqui a partícula vai consistir em uma região material infinitesimal dA , de volume dV .

$$\sum_{i \neq k} \overline{H}_i^k dV = \overline{H}^k dV$$

Aplicando a 3ª lei de Newton obtemos:

$$\overline{H}_i^k = -\overline{H}_k^i \quad (1.19)$$

A força gerada por \overline{H}_i^k , terá a direção da diferença de velocidades $\overline{v}_i - \overline{v}_k$, pois ela é uma espécie de força de arrasto. Se $\overline{v}_i \neq \overline{v}_k$, não podemos associar um tensor a esta força (já que ela possui direção e sentido fixos, não variando conforme a escolha de $d\overline{A}$). So iremos tratar o caso em que $\overline{v}_i = \overline{v}_k$, pois se as velocidades forem iguais em uma região, podemos tratar \mathcal{C}_k e \mathcal{C}_i como um constituinte só.

Quanto a força de superfície associada a \mathcal{C}_k , no caso $\overline{v}_i = \overline{v}_k$, esta força será ação do componente-k sobre ele mesmo (já que a força dos outros constituintes sobre \mathcal{C}_k está descrita por \overline{H}^k). Definiremos um tensor parcial de tensões \mathbf{T}^k , de forma que a tensão em um elemento de área $d\overline{A} = \hat{n} dA$ seria:

$$\mathbf{T}^k \cdot d\overline{A} \text{ ou } \mathbf{T}^k \cdot \hat{n} dA$$

Assim, a taxa de variação do momento linear de \mathcal{C}_k em uma região material vale:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \overline{v}^k \rho_k dV = \iiint_{R_k} (\overline{H}^k + \rho_k \overline{G}^k) dV + \iint_{\partial R_k} \mathbf{T}^k \cdot d\overline{A} \quad (1.20)$$

que é uma aplicação da 2ª lei de Newton para o sistema de partículas [12]

Proposição 1.4 (equação do momento linear para \mathcal{C}_k) Seja $\overline{a}^k = \frac{D\overline{v}^k}{Dt}$ e $\text{div } \mathbf{T}^k$ o divergente do tensor parcial de tensões³,

$$\Rightarrow \rho_k \overline{a}^k = \overline{H}^k + \rho_k \overline{G}^k + \text{div } \mathbf{T}^k \quad (1.21)$$

³ O divergente de um tensor é definido como sendo o vetor em que as componentes correspondem ao divergente de cada linha do tensor

Aplicando a eq. (1.18) e o teorema da divergência em (1.19), obtemos:

$$\iiint_{R_k} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV = \iiint_{R_k} (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iiint_{R_k} \text{div } \mathbf{T}^k dV$$

que vale para qualquer região material R_k , portanto

$$\rho_k \frac{D\bar{v}^k}{Dt} = \bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k + \text{div } \mathbf{T}^k$$

Multiplicando a eq. (1.20) por dV , teremos uma interpretação intuitiva para a proposição 1.4:

$$\bar{a}^k \rho_k dV = \bar{H}^k dV + \bar{G}^k \rho_k dV + \text{div } \mathbf{T}^k dV \Rightarrow$$

$$\bar{a}^k dm_k = \bar{H}^k dV + \bar{G}^k dm_k + \text{div } \mathbf{T}^k dV$$

que é a 2ª lei de Newton para a partícula de \mathcal{C}_k com volume dV (massa \times aceleração = soma das forças).

Somando (1.21) para todos os constituintes, obtemos:

$$\sum \rho_k \bar{a}^k = \sum \bar{H}^k + \sum \rho_k \bar{G}^k + \text{div } \sum \mathbf{T}^k \quad (1.22)$$

Analisando cada termo desta equação:

- $\sum \bar{H}^k = \sum_k \sum_{i \neq k} \bar{H}_i^k$ e por (1.19) teremos $\sum \bar{H}^k = \bar{0}$
- $\sum \bar{a}^k \rho_k dV$ é o limite $Vol \rightarrow 0$ do produto da massa pela aceleração do centro de massa da mistura (todos componentes), contida em uma região A .

A aceleração do centro de massa é dada por $\bar{a}^c = \sum \bar{a} dm / M_{total}$ ou seja

$$\bar{a}^c \iiint_A \rho dV = \sum \iiint_A \bar{a}^k \rho_k dV$$

tomando o limite:

$$\lim \bar{a}^c = \left(\sum \bar{a}^k \rho_k \right) / \rho$$

Chamaremos $\bar{\mathbf{a}} = \left(\sum \bar{\mathbf{a}}^k \rho_k \right) / \rho$ de aceleração baricêntrica. Infelizmente, ela não coincide com a derivada material da velocidade baricêntrica.

- $\sum \rho_k \bar{\mathbf{G}}^k dV$ corresponde a soma de todas as forças de corpo (todos os componentes) em dV . Se todos os constituintes estiverem submetidos ao “mesmo $\bar{\mathbf{G}}^k$ ” (que é o caso campo gravitacional), teremos:

$$\bar{\mathbf{G}}^1 = \bar{\mathbf{G}}^2 = \dots = \bar{\mathbf{G}} \Rightarrow \sum \rho_k \bar{\mathbf{G}}^k = \bar{\mathbf{G}} \sum \rho_k = \bar{\mathbf{G}} \rho$$

- $\sum \mathbf{T}^k$ possui a interpretação mais simples. A soma de todas as tensões em todos os constituintes, atuando em uma superfície $d\bar{\mathbf{A}}$, vale:

$$\left(\sum \mathbf{T}^k \right) \cdot d\bar{\mathbf{A}}$$

Chamaremos $\sum \mathbf{T}^k = \mathbf{T}$ tensor de tensões da mistura.

Podemos reescrever a eq. (1.22) como

Proposição 1.5 (*equação do momento linear da mistura*):

$$\rho \bar{\mathbf{a}} = \sum_k \rho_k \bar{\mathbf{G}}^k + \text{div } \mathbf{T}$$

e no caso a única força de corpo ser o peso:

$$\rho \bar{\mathbf{a}} = \rho \bar{\mathbf{g}} + \text{div } \mathbf{T}$$

1.4 EQUAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Sabemos pelo princípio do momento angular de Euler ([12] e [15]) que:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\bar{L}^k}{dt}$$

onde τ e L são respectivamente a torque e momento angular em uma partícula de constituinte \mathcal{C}_k . O momento angular de uma região material R_k em relação à origem é dado por:

$$\bar{L}^k = \iiint_{R_k} \bar{x} \times \bar{v}^k \rho_k dV \quad (1.23)$$

Na soma dos torques, temos que somar os torques gerados por todas as forças externas atuando sobre o constituinte em R_k . Teremos então que:

$$\sum \vec{\tau} = \iiint_{R_k} \bar{x} \times (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iint_{\partial R_k} \bar{x} \times (\mathbf{T}^k \cdot d\bar{A}) \quad (1.24)$$

Observe que apesar das tensões serem forças do constituinte sobre ele mesmo, elas não são forças internas na superfície ∂R_k pois serão as forças que o exterior à R_k exerce sobre o interior à R_k .

A partir do princípio do momento angular, podemos concluir a proposição:

Proposição 1.6 (*equação do momento angular*): *O tensor parcial de tensões é simétrico.*

$$T_{i,j}^k = T_{j,i}^k$$

Iremos recorrer à base canônica para desenvolver os cálculos.

Usando a eq. 1.18 para calcular a derivada do momento angular:

$$\frac{d\bar{L}^k}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \bar{x} \times \bar{v}^k \rho_k dV = \iiint_{R_k} \frac{D^k}{Dt} (\bar{x} \times \bar{v}^k) \rho_k dV = \iiint_{R_k} \bar{x} \times \bar{a}^k \rho_k dV \quad (1.25)$$

usando a equação do momento linear (1.21) para substituir $\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k$ em (1.24) obtemos:

$$\iiint_{R_k} \bar{x} \times (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV = \iiint_{R_k} \bar{x} \times (\rho_k \bar{a}^k - \text{div } \mathbf{T}^k) dV$$

igualando a soma dos torques (1.24) à derivada do momento angular (1.25) temos:

$$\begin{aligned} \iiint_{R_k} \bar{x} \times \bar{a}^k \rho_k dV &= \iiint_{R_k} \bar{x} \times (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iint_{\partial R_k} \bar{x} \times (\mathbf{T}^k \cdot d\bar{A}) \Rightarrow \\ \iiint_{R_k} \bar{x} \times \bar{a}^k \rho_k dV &= \iiint_{R_k} \bar{x} \times (\rho_k \bar{a}^k - \text{div } \mathbf{T}^k) dV + \iint_{\partial R_k} \bar{x} \times (\mathbf{T}^k \cdot d\bar{A}) \end{aligned}$$

portanto,

$$\iiint_{R_k} \bar{x} \times \text{div } \mathbf{T}^k dV = \iint_{\partial R_k} \bar{x} \times (\mathbf{T}^k \cdot d\bar{A}) \quad (1.26)$$

Analisaremos apenas a componente em x_1 da igualdade acima (resultado para as demais componentes, é análogo) . Efetuando os cálculos da integral dupla:

$$\mathbf{T}^k \cdot d\bar{A} = \left(\sum T_{1,i}^k dA_i, \sum T_{2,i}^k dA_i, \sum T_{3,i}^k dA_i \right)$$

e a 1ª componente do produto vetorial $\bar{x} \times (\mathbf{T}^k \cdot d\bar{A})$:

$$x_2 \sum T_{3,i}^k dA_i - x_3 \sum T_{2,i}^k dA_i = (x_2 T_{3,1}^k - x_3 T_{2,1}^k, x_2 T_{3,2}^k - x_3 T_{2,2}^k, x_2 T_{3,3}^k - x_3 T_{2,3}^k) \cdot d\bar{A}$$

tomando o divergente

$$\begin{aligned} \left(x_2 \frac{\partial T_{3,1}^k}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial T_{2,1}^k}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial T_{3,2}^k}{\partial x_2} + T_{3,2}^k - x_3 \frac{\partial T_{2,2}^k}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial T_{3,3}^k}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial T_{2,3}^k}{\partial x_3} - T_{2,3}^k \right) = \\ = T_{3,2}^k - T_{2,3}^k + x_2 \sum_i \frac{\partial T_{3,i}^k}{\partial x_i} - x_3 \sum_i \frac{\partial T_{2,i}^k}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Calculando o divergente do tensor de tensões:

$$\text{div } \mathbf{T}^k = \left(\sum \frac{\partial T_{1,i}^k}{\partial x_i}, \sum \frac{\partial T_{2,i}^k}{\partial x_i}, \sum \frac{\partial T_{3,i}^k}{\partial x_i} \right)$$

e a 1ª componente de $\bar{x} \times \text{div } \mathbf{T}^k$:

$$x_2 \sum_i \frac{\partial T_{3,i}^k}{\partial x_i} - x_3 \sum_i \frac{\partial T_{2,i}^k}{\partial x_i}$$

substituindo em (1.26) e tomando a 1ª componente encontramos:

$$\iiint_{R_k} \left(x_2 \sum_i \frac{\partial T_{3,i}^k}{\partial x_i} - x_3 \sum_i \frac{\partial T_{2,i}^k}{\partial x_i} \right) dV = \iiint_{R_k} \left(T_{3,2}^k - T_{2,3}^k + x_2 \sum_i \frac{\partial T_{3,i}^k}{\partial x_i} - x_3 \sum_i \frac{\partial T_{2,i}^k}{\partial x_i} \right) dV$$

donde se conclui que :

$$\iiint_{R_k} (T_{3,2}^k - T_{2,3}^k) dV = 0$$

para qualquer região R_k logo $T_{3,2}^k - T_{2,3}^k = 0$. Efetuando a mesma conta para as demais componentes, concluímos que: $T_{1,2}^k - T_{2,1}^k = 0$ e $T_{3,1}^k - T_{1,3}^k = 0$ provando a simetria de.

Como corolário temos:

Proposição 1.7 : *O tensor de tensões \mathbf{T} é simétrico,*

$$T_{i,j} = T_{j,i}$$

pois $\mathbf{T} = \sum \mathbf{T}^k$ é a soma de tensores simétricos.

A proposição 1.6, apesar de válida para o modelo ideal de mistura (onde todos os constituintes ocupam toda região da mistura), nem sempre será válida para aplicações reais, como por exemplo se tivermos pequenos sólidos misturados a um líquido. O movimento do líquido pode gerar uma rotação nos sólidos (spin), comportamento que não seria previsto no modelo ideal.

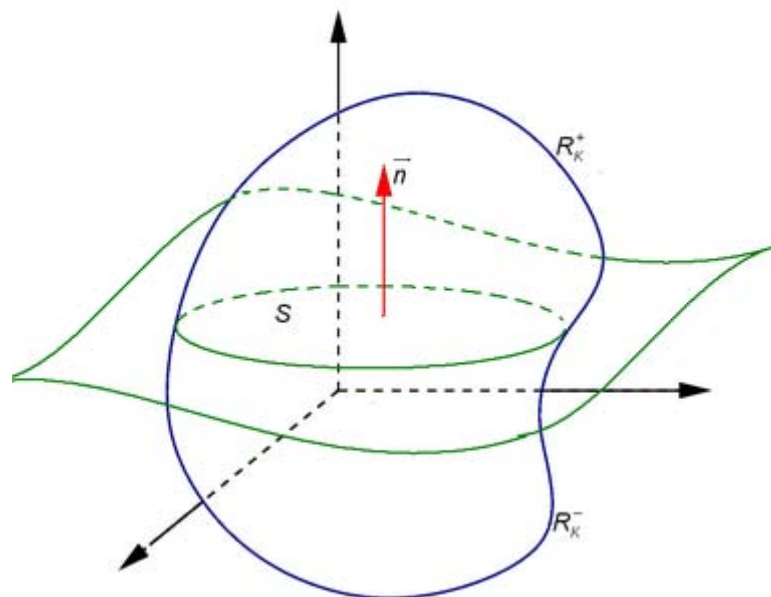
1.5 CONDIÇÕES DE SALTO

Iremos definir uma superfície de interface S como sendo o conjunto dos pontos de descontinuidade de algumas grandezas físicas (densidade, velocidade, pressão, tensor de tensões, etc...). Ela divide o espaço em duas regiões R^+ e R^- , onde as grandezas são contínuas. Em geral a superfície de interface não é uma superfície material.

Seja S uma superfície orientada e f uma função definida no espaço, definimos a variação de f em S como:

$$[f] \equiv \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(f(\bar{x} + h\bar{n}) - f(\bar{x} - h\bar{n}) \right)$$

onde \bar{n} é o vetor normal a S . A variação de f corresponde à diferença entre os valores da função dos 2 lados da superfície.



Região cortada por superfície S

Se φ é uma função contínua em S , temos as seguintes propriedades:

- i - $[\varphi] = 0$
- ii - $[\varphi f] = \varphi[f]$
- iii - $[f + g] = [f] + [g]$

Proposição 1.7 (Teorema do transporte de Reynolds para regiões contendo uma superfície de interface) Seja R_k região material do componente- k e S interseção da superfície de interface com a região R_k . Então

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} f dV = \iiint_{R_k} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \bar{v}^k) \right) dV + \iint_S \left[f \cdot (\bar{v}^k - \bar{u}) \right] \cdot d\bar{A}$$

onde \bar{u} é a velocidades de cada ponto da superfície S .

A superfície S divide a região R_k em 2 regiões ; R_k^+ na na direção do vetor normal \bar{n} , e R_k^- na direção oposta a \bar{n} . Chamaremos ainda S_k^+ a borda de R_k no lado de R_k^+ e S_k^- no lado de R_k^- , portanto :

$$\partial R_k^+ = S + S_k^+ \text{ e } \partial R_k^- = S + S_k^-$$

Tanto R_k^+ como R_k^- não são regiões materiais, pois S não é uma superfície material, porém não há descontinuidade no interior delas, pois a descontinuidade está em S que não tem interseção com o interior de R_k^+ ou R_k^- .

Denotaremos f^+ , a função f restrita a R_k^+ e f^- restrita a R_k^- . Podemos então aplicar o teorema do transporte de Reynolds a cada uma das regiões (R_k^+ e R_k^-). Teremos então:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} f dV = \frac{d}{dt} \iiint_{R_k^+} f dV + \frac{d}{dt} \iiint_{R_k^-} f dV \quad (1.27)$$

aplicando o teorema do transporte nas integrais em R_k^+ e R_k^- teremos:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k^+} f dV = \iiint_{R_k^+} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_{S_k^+} f \bar{v}^k \cdot d\bar{A} - \iint_S f^+ \bar{u} \cdot \hat{n} dA$$

observando que $d\bar{A}$ é orientado de dentro para fora de R_k^+ e \hat{n} mantém a orientação da superfície S . Somando e subtraindo a integral de $f^+ \bar{v}^{k+}$ para obter uma integral de superfície fechada:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k^+} f dV = \iiint_{R_k^+} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_{S+S_k^+} f^+ \bar{v}^{k+} \cdot d\bar{A} - \iint_S f^+ \cdot (\bar{u} - \bar{v}^{k+}) \cdot \hat{n} dA \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k^+} f dV = \iiint_{R_k^+} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{v}^k) dV + \iint_S f^+ \cdot (\vec{v}^{k+} - \vec{u}) \cdot \hat{n} dA$$

analogamente, para R_k^- teremos:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k^-} f dV = \iiint_{R_k^-} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{v}^k) dV + \iint_S f^- \cdot (\vec{v}^{k-} - \vec{u}) \cdot \hat{n} dA$$

A diferença de sinal nas integrais de superfície, deve-se ao fato que \hat{n} está orientado de fora para dentro em ∂R_k^+ e de dentro para fora em ∂R_k^- .

Somando as 2 integrais obtemos a integral em toda região R_k :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{R_k} f dV &= \iiint_{R_k} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{v}^k) \right) dV + \iint_S \left(f^+ \cdot (\vec{v}^{k+} - \vec{u}) - f^- \cdot (\vec{v}^{k-} - \vec{u}) \right) \cdot \hat{n} dA = \\ &= \iiint_{R_k} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{v}^k) \right) dV + \iint_S \left[f \cdot (\vec{v}^k - \vec{u}) \right] \cdot \hat{n} dA \end{aligned}$$

Proposição 1.8 (*condições de salto para conservação de massa*)

$$\left[\rho_k (\vec{v}^k - \vec{u}) \cdot \hat{n} \right] = 0 \quad (1.28)$$

R_k é uma região material, portanto a massa total de componente-k não se altera independente da presença da superfície de interface, ou seja:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \rho_k dV = 0$$

Usando a proposição 1.7 :

$$\iiint_{R_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \vec{v}^k) \right) dV + \iint_S \left[\rho_k \cdot (\vec{v}^k - \vec{u}) \right] \cdot \hat{n} dA = 0$$

pela equação da continuidade (proposição 1.2) teremos:

$$\iiint_{R_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \vec{v}^k) \right) dV = 0 \Rightarrow$$

$$\iint_S \left[\rho_k \cdot (\bar{v}^k - \bar{u}) \right] \cdot \hat{n} dA = 0$$

valida para qualquer “pedaço” de superfície contida em S , portanto:

$$\left[\rho_k \cdot (\bar{v}^k - \bar{u}) \right] \cdot \hat{n} = 0$$

Somando a equação da continuidade (1.28) em k , iremos obter uma equação da continuidade para a mistura:

$$0 = \sum_k \left(\left[\rho_k \cdot (\bar{v}^k - \bar{u}) \right] \cdot \hat{n} \right) = \left[\hat{n} \cdot \sum_k \rho_k \cdot (\bar{v}^k - \bar{u}) \right] = \hat{n} \cdot \left[\sum_k \rho_k \bar{v}^k - \bar{u} \sum_k \rho_k \right]$$

substituindo as equações (1.4) e (1.8), teremos:

$$\left[\rho (\bar{v} - \bar{u}) \cdot \hat{n} \right] = 0$$

A relação acima é válida mesmo que não haja descontinuidade na superfície para todos os componentes, pois se ρ_i e \bar{v}^i forem contínuos em S , teremos que

$$\left[\rho_i \cdot (\bar{v}^i - \bar{u}) \right] = 0$$

Proposição 1.9 (*condição de salto para o momento linear*)

$$\left[\rho_k \bar{v}^k \left((\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n} \right) - T^k \cdot \hat{n} \right] = \bar{0} \quad \text{ou} \quad \left[\rho_k \bar{v}^k \otimes (\bar{v}^k - \bar{u}) \hat{n} - T^k \cdot \hat{n} \right] = \bar{0} \quad (1.29)$$

Reescrevendo a equação (1.20), que é a 2ª lei de Newton em R_k :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \bar{v}^k \rho_k dV = \iiint_{R_k} (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iint_{\partial R_k} T^k \cdot d\bar{A}$$

Pela proposição 1.7, a 1ª integral pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \bar{v}^k \rho_k dV = \iiint_{R_k} \left(\frac{\partial \bar{v}^k \rho_k}{\partial t} + \text{div} \left(\rho_k \bar{v}^k \otimes \bar{v}^k \right) \right) dV + \iint_S \left[\rho_k \bar{v}^k \left((\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n} \right) \right] dA$$

Podemos ainda, usando a equação da continuidade (1.14), desenvolver:

$$\iiint_{R_k} \left(\frac{\partial \bar{v}^k}{\partial t} \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \bar{v}^k \otimes \bar{v}^k) \right) dV = \iiint_{R_k} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV = \iiint_{R_k^+} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV + \iiint_{R_k^-} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV$$

As regiões R_k^+ e R_k^- não possuem descontinuidades em seu interior, portanto correspondem à soma das forças nas respectivas regiões:

$$\iiint_{R_k^+} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV = \iiint_{R_k^+} (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iint_{(-S)+S_k^+} \mathbf{T}^{k+} \cdot d\bar{A}$$

A relação para R_k^- é análoga. Repare que apesar de R_k^+ não ser região material, a identidade continua válida, pois não há nenhuma derivada de integral. Substituindo as integrais acima, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \bar{v}^k \rho_k dV &= \iiint_{R_k^+} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV + \iiint_{R_k^-} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV + \iint_S [\rho_k \bar{v}^k ((\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n})] dA = \\ &= \iiint_{R_k} (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iint_{(-S)+S_k^+} \mathbf{T}^{k+} \cdot d\bar{A} + \iint_{S+S_k^-} \mathbf{T}^{k-} \cdot d\bar{A} + \iint_S [\rho_k \bar{v}^k ((\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n})] dA = \\ &= \iiint_{R_k} (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iint_{\partial R_k} \mathbf{T}^k \cdot d\bar{A} - \iint_S [\mathbf{T}^k \cdot \hat{n}] dA + \iint_S [\rho_k \bar{v}^k ((\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n})] dA \end{aligned}$$

igualando a relação acima às forças em (1.20) teremos:

$$-\iint_S [\mathbf{T}^k \cdot \hat{n}] dA + \iint_S [\rho_k \bar{v}^k ((\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n})] dA = 0$$

para qualquer pedaço da superfície S , portanto

$$\left[\rho_k \bar{v}^k ((\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n}) - \mathbf{T}^k \cdot \hat{n} \right] = \bar{0}.$$

2 MODELO MECÂNICO

Neste capítulo aplicaremos a teoria de mistura para modelar o escoamento de um líquido por um meio poroso rígido, homogêneo, isotrópico e em repouso. A mistura será formada por 3 constituintes: um líquido incompressível, o meio poroso e um gás inerte com baixíssima densidade. Assumiremos também que a mistura é isotérmica e que os componentes são quimicamente inertes, ou seja, não haverá reação química entre eles. Iremos nos referir ao constituinte líquido por \mathcal{C}_F (componente-F), e as grandezas associadas a ele por $\rho_F, \bar{V}^F, T^F, \dots$ etc, e ao constituinte gasoso por \mathcal{C}_G .

Alguns conceitos associados ao meio poroso são descritos a seguir:

- POROSIDADE (ε): corresponde à razão entre o volume máximo de líquido que pode ser colocado em um meio poroso e o volume total da região contendo o meio poroso. Intuitivamente, ε é uma medida da quantidade de vazios ativos no meio poroso, e seus valores variam de $0 < \varepsilon < 1$.
- FRAÇÃO DE FLUIDO (φ): corresponde a razão entre o volume de líquido em um meio poroso dV_F (volume do líquido tratado como contínuo isolado fora da mistura) e o volume total da região contendo o meio poroso dV . Analisando um fluido contido em um volume infinitesimal, temos:

$$\rho_F = \frac{dm_F}{dV}$$

onde ρ_F corresponde a densidade parcial do fluido em dV . Sabemos que

$$\rho_0 = \frac{dm_F}{dV_F}$$

onde ρ_0 corresponde a densidade usual do fluido. Logo a fração de fluido vale

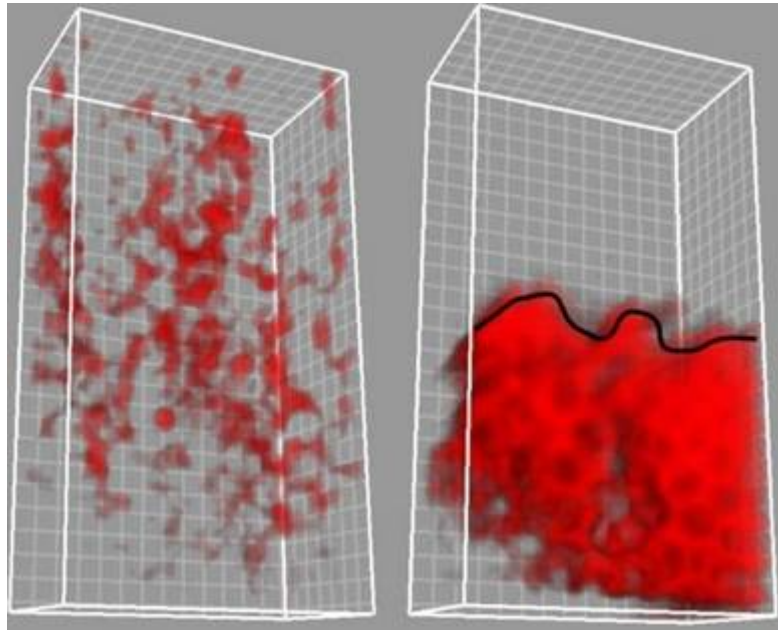
$$\varphi = \frac{dV_F}{dV} = \frac{dm_F/\rho_0}{dm_F/\rho_F} = \frac{\rho_F}{\rho_0} \quad (2.1)$$

- SATURAÇÃO (ψ) : corresponde a quanto do meio poroso está preenchido com fluido, ou seja, a razão entre o volume de fluido em um meio poroso e o volume máximo de fluido que pode ser colocado no meio poroso, portanto seus valores podem variar de $0 < \psi \leq 1$. Em um dV teremos:

$$\psi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dV_F}{dV} \quad (2.2)$$

substituindo ρ_0 e ρ_F temos:

$$\psi = \frac{\rho_F}{\varepsilon \rho_0} = \frac{\varphi}{\varepsilon} \quad (2.3)$$



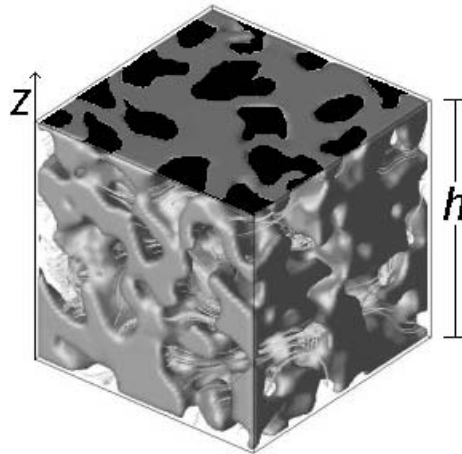
Variações de saturação e fração de fluido

Na mistura em foco neste trabalho só trabalharemos com as equações que governam o movimento do líquido, pois o meio poroso é rígido e está em repouso e o gás inerte serve apenas para dotar a mistura de uma certa compressibilidade ao preencher os espaços não preenchidos pelo fluido, portanto a saturação ψ nos indicará quanto de fluido e quanto de gás teremos no meio poroso. Vamos então simplificar a notação, denotando:

$$\vec{v}^F = \vec{v}$$

Observe que neste capítulo, v não está representando a velocidade baricêntrica, como no capítulo anterior.

Analisando um paralelepípedo de um meio poroso uniforme, chamaremos de A_ε , a soma das áreas dos poros em uma face (em preto) e A a área da face.



Matriz porosa em forma de paralelepípedo

Teremos então :

$$\int A_\varepsilon dz = A_\varepsilon h = \text{volume dos poros}$$

portanto:

$$A_\varepsilon h = \varepsilon Ah \Rightarrow A_\varepsilon = \varepsilon A$$

observe que esta relação serve para cortes em qualquer direção, para um meio poroso natural, independente dele ser isotrópico.

A pressão de gás-líquido dentro dos poros, será denotada por p_0 , e pode ser calculada por:

$$p_0 = \frac{dF}{dA_\varepsilon} = \frac{dF}{\varepsilon dA}$$

A pressão parcial da mistura gás-líquido, que é a soma das pressões parciais $p_F + p_G$, vale:

$$p_F + p_G = \frac{dF}{dA} = \varepsilon p_0 \quad (2.4)$$

O valor de F é o mesmo nas 2 equações, pois no cálculo das pressões parciais, só haverá gás-fluido, nos poros.

A relação entre p_F e p_G , depende de quanto gás e quanto líquido há nos poros, ou seja, elas serão proporcionais aos respectivos volumes. Teremos então:

$$\psi = \frac{dV_F}{dV_F + dV_G} = \frac{\rho_F}{\rho_F + \rho_G}$$

substituindo as eqs. (2.4) e (2.3) :

$$\rho_F = \psi \varepsilon \rho_0 \Rightarrow$$

$$\rho_F = \varphi \rho_0$$

Quanto às relações constitutivas para o tensor parcial de tensões \mathbf{T}^F , o meio poroso não permite a formação das lâminas do fluxo laminar. A direção em que o fluido se desloca, não é regida pela viscosidade, pois o fluido segue o caminho dos poros, portanto seu movimento é dominado pela ação da pressão. Descartaremos então as componentes de cisalhamento do tensor de tensões e a força de superfície na interface. O tensor de tensões consistirá apenas das tensões normais do fluido, ou seja:

$$\mathbf{T}^F = -\rho_F \mathbf{I} = -\rho_0 \varphi \mathbf{I} \quad (2.5)$$

onde \mathbf{I} é o tensor identidade e ρ_0 será assumida constante enquanto não houver saturação.

Reescrevendo a equação da continuidade (1.14), para \mathcal{C}_F teremos:

$$\frac{\partial \rho_F}{\partial t} + \text{div}(\rho_F \bar{\mathbf{v}}) = 0$$

substituindo a eq. (2.1) obtemos:

$$\frac{\partial (\varphi \rho_0)}{\partial t} + \text{div}(\varphi \rho_0 \bar{\mathbf{v}}) = 0$$

Como ρ_0 é constante:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div}(\varphi \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad (2.6)$$

que no caso unidimensional se reduz a:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi v)}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

A equação do momento linear para o componente-F, é da forma:

$$\rho_F \bar{\mathbf{a}}^F = \bar{\mathbf{H}}^F + \rho_F \bar{\mathbf{G}}^F + \text{div} \mathbf{T}^F$$

como $\overline{\mathbf{a}}^F = \frac{D\overline{\mathbf{v}}}{Dt} = \nabla\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{v}} + \frac{\partial\overline{\mathbf{v}}}{\partial t}$ e por (2.5) $\mathbf{T}^F = -\rho_0 \varphi \mathbf{I}$ teremos:

$$\begin{aligned} \rho_F \left(\nabla\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{v}} + \frac{\partial\overline{\mathbf{v}}}{\partial t} \right) &= \overline{H}^F + \rho_F \overline{\mathbf{G}}^F - \text{div}(\rho_0 \varphi \mathbf{I}) = \\ &= \rho_F \left(\nabla\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{v}} + \frac{\partial\overline{\mathbf{v}}}{\partial t} \right) = \overline{H}^F + \rho_F \overline{\mathbf{G}}^F - \nabla(\rho_0 \varphi) \end{aligned} \quad (2.8)$$

A força de corpo $\rho_F \overline{\mathbf{G}}^F$, será desconsiderada, pois seu efeito é desprezível, comparado às outras forças. Assumiremos também que \overline{H}^F está relacionado ao gradiente de saturação [18]:

$$\overline{H}^F = -\frac{\mu D}{K} \nabla \varphi \quad (2.9)$$

onde: $\left\{ \begin{array}{l} \mu \text{ - representa a viscosidade do fluido} \\ D \text{ - é o coeficiente de difusão} \\ K \text{ - permeabilidade específica do meio poroso} \end{array} \right.$

substituindo as eqs. (2.1) e (2.9) na equação de momento linear, teremos:

$$\varphi \left(\nabla\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{v}} + \frac{\partial\overline{\mathbf{v}}}{\partial t} \right) = -\nabla \left(\frac{\mu D}{K \rho_0} + \frac{\rho_0 \varphi}{\rho_0} \right)$$

podemos reescrever a equação acima de forma mais conveniente definindo pressão:

$$p = \frac{\mu D}{K \rho_0} + \frac{\rho_0 \varphi}{\rho_0} \quad (2.10)$$

observando que p é função apenas de φ . A pressão p não é uma pressão usual ou parcial, sua definição serve apenas para normalizar a equação. Substituindo p teremos:

$$\varphi \left(\nabla\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{v}} + \frac{\partial\overline{\mathbf{v}}}{\partial t} \right) + \nabla p = 0 \quad (2.11)$$

que pode ainda ser reescrita somando-se $\overline{\mathbf{v}}$ vezes a equação (2.6)

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{v}} \text{div}(\varphi \overline{\mathbf{v}}) + \overline{\mathbf{v}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \varphi \nabla\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{v}} + \nabla p = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial(\varphi \overline{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla(\varphi \overline{\mathbf{v}}) \cdot \overline{\mathbf{v}} + \varphi \overline{\mathbf{v}} \text{div} \overline{\mathbf{v}} + \nabla p = 0 \quad \text{ou} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\varphi \bar{v})}{\partial t} + \nabla(\varphi \bar{v}) \cdot \bar{v} + \operatorname{div}(\varphi \bar{v} \otimes \bar{v}) + \nabla p = 0$$

No caso unidimensional, faremos as substituições:

$$\nabla p \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{e} \quad \nabla \bar{v} \cdot \bar{v} \rightarrow v \frac{\partial v}{\partial x}$$

na eq. (2.11) e teremos

$$\varphi v \frac{\partial v}{\partial x} + \varphi \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

somando v vezes a eq. (2.7) :

$$\underbrace{v \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x}}_{\frac{\partial(\varphi v v)}{\partial x}} + \underbrace{\varphi v \frac{\partial v}{\partial x} + \varphi \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{\frac{\partial(\varphi v)}{\partial t}} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

obtendo a seguinte equação do momento linear no caso unidimensional

$$\frac{\partial(\varphi v)}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi v^2 + p)}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

Nosso modelo matemático para o escoamento unidimensional em meio poroso, consiste nas equações (2.7) e (2.12). Teremos ainda que $t > 0$ e a fração de fluido φ , pode variar no máximo até os poros estarem totalmente preenchidos pelo fluido, ou seja quando houver saturação:

$$\varphi_{\max} = \varepsilon$$

resultando no sistema hiperbólico não linear de equações diferenciais parciais,

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\varphi v)}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi v^2 + p)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, sujeito a restrição geométrica $0 < \varphi \leq \varepsilon$.

A seguir, iremos desenvolver as condições de salto para o caso unidimensional. Substituindo $\rho = \rho_0 \varphi$ na equação da continuidade (1.28), teremos:

$$[\varphi \rho_0 (v - u) i \cdot \hat{n}] = 0$$

observe que \hat{n} só pode assumir os valores $\pm i$, que implica

$$[\varphi \rho_0 (v - u)] = 0 \Rightarrow \rho_0 [\varphi v] = \rho_0 u [\varphi] \Rightarrow$$

$$[\varphi v] = u[\varphi] \quad (2.14)$$

que é a condição de salto da equação da continuidade no caso unidimensional.

Na equação do momento linear (1.29), iremos substituir também $\mathbf{T}^F = -\rho_0 \varphi \mathbf{I}$, obtendo:

$$\begin{aligned} [\rho_0 \varphi v i((v-u)i \cdot \hat{n}) + \varphi \rho_0 \hat{n}] &= \vec{0} \Rightarrow \\ [\rho_0 \varphi v^2 - \rho_0 \varphi v u + \varphi \rho_0] &= 0 \end{aligned}$$

dividindo por ρ_0 :

$$\left[\varphi v^2 + \varphi \frac{\rho_0}{\rho_0} \right] = [\varphi v] u$$

pela equação (2.10), sabemos que $\left[\varphi \frac{\rho_0}{\rho_0} \right] = [\rho]$, portanto:

$$[\varphi v^2 + \rho] = [\varphi v] u$$

que é a condição de salto para o momento linear no caso unidimensional.

As duas condições de salto podem ser reescritas da forma:

$$\frac{[\varphi v]}{[\varphi]} = \frac{[\varphi v^2 + \rho]}{[\varphi v]} = u \quad (2.15)$$

3 O PROBLEMA DE RIEMANN ASSOCIADO AO ESCOAMENTO EM MEIO POROSO

O sistema de equações diferenciais parciais (2.12)

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\varphi v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho + \varphi v^2) = 0 \end{cases}$$

discutido no capítulo 2, juntamente com as condições iniciais

$$(\varphi, v) = \begin{cases} (\varphi_L, v_L) \text{ para } x < 0 \\ (\varphi_R, v_R) \text{ para } x > 0 \end{cases} \text{ em } t=0$$

torna-se um problema de Riemann clássico, que possui a mesma estrutura em problemas de elasticidade e dinâmica de gases.

Na nossa análise inicial, adotaremos ρ como função de φ (não necessariamente $\rho_0\varphi$). Teremos ainda que $\rho' > 0$ nos dará um problema hiperbólico e $\rho'' > 0$ um sistema não linear.

Definindo $\xi = x/t$ (ver Apêndice B) teremos que tanto φ , v e ρ serão funções de ξ , e fazendo a mudança de variável de (x, t) para ξ , nosso sistema de equações diferenciais parciais se transforma num sistema de equações diferenciais ordinárias. Aplicando a regra da cadeia

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{x}{t^2} \frac{dw}{d\xi} \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{dw}{d\xi} \end{cases} \text{ obtemos}$$

$$\begin{cases} -\xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{d(\varphi v)}{d\xi} = 0 \\ -\xi \frac{d(\varphi v)}{d\xi} + \rho' \frac{d\varphi}{d\xi} + v \frac{d(\varphi v)}{d\xi} + \varphi v \frac{dv}{d\xi} = 0 \end{cases}$$

usando a derivada do produto $v \frac{d(\varphi v)}{d\xi} = v \left(v \frac{d\varphi}{d\xi} + \varphi \frac{dv}{d\xi} \right)$ para substituir $\frac{dv}{d\xi}$

obtemos:

$$\begin{cases} -\xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{d(\varphi v)}{d\xi} = 0 \\ (p' - v^2) \frac{d\varphi}{d\xi} + (2v - \xi) \frac{d(\varphi v)}{d\xi} = 0 \end{cases}$$

que escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} -\xi & 1 \\ (p' - v^2) & (2v - \xi) \end{bmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

O sistema possui a solução trivial:

$$\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi \text{ e } v \text{ constantes}$$

Não haverá solução contínua em todo domínio ($t \geq 0$) satisfazendo a solução acima, pois $\varphi_R \neq \varphi_L$ e $v_R \neq v_L$. O sistema terá também solução se:

$$\det \begin{bmatrix} -\xi & 1 \\ (p' - v^2) & (2v - \xi) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

e as soluções estariam no núcleo da transformação. Resolvendo a equação (3.2) obtemos:

$$\lambda_1 = v - \sqrt{p'} \text{ e } \lambda_2 = v + \sqrt{p'}$$

Podemos observar que λ_1 e λ_2 são os autovalores da matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (p' - v^2) & 2v \end{bmatrix}$$

Substituindo o valor $\lambda_1 = v - \sqrt{p'}$ e efetuando a primeira linha do produto matricial (3.1) (observe que uma linha do produto matricial já é suficiente), obtemos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{p'} - v) d\varphi + d(\varphi v) &= 0 \Rightarrow \\ \sqrt{p'} d\varphi + \varphi dv &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Integrando os dois lados, obtemos o primeiro invariante de Riemann:

$$R_1 \equiv v + \int \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi$$

Analogamente, substituindo o valor $\lambda_2 = v + \sqrt{p'}$, obtemos o segundo invariante de Riemann :

$$R_2 \equiv v - \int \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi$$

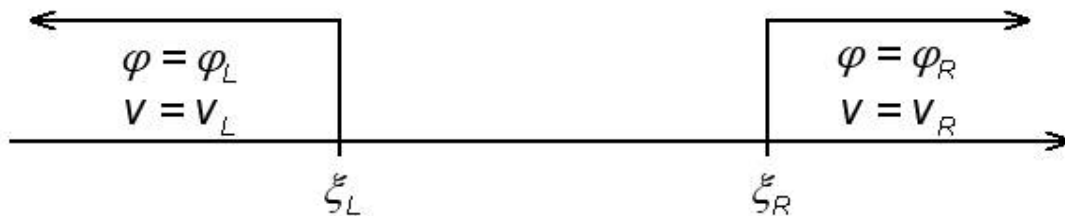
Tanto $\lambda_1 = v - \sqrt{p'}$ como $\lambda_2 = v + \sqrt{p'}$ não geram solução contínua em todo domínio ($\xi \in \mathbb{R}$), pois a condição inicial (φ_L, v_L) para $x < 0$ e $t = 0$ implicaria que $\xi \rightarrow v_L \pm \sqrt{p'(\varphi_L)}$ que possui um valor finito, enquanto sabemos que $\xi \rightarrow -\infty$. O mesmo ocorre para (φ_R, v_R) para $x > 0$ e $t = 0$. Iremos nos referir aos 3 tipos de solução por:

- S_0 quando φ e v constantes
- S_1 quando $\xi = \frac{x}{t} = v - \sqrt{p'}$
- S_2 quando $\xi = \frac{x}{t} = v + \sqrt{p'}$

Como nenhuma das 3 gera uma solução contínua em toda reta $\xi \in \mathbb{R}$, para obter tal solução teremos de combinar os 3 tipos de solução em subintervalos da reta. Como em $\xi \rightarrow \pm \infty$, não há solução do tipo S_1 ou S_2 , teremos que φ e v serão constantes nos intervalos:

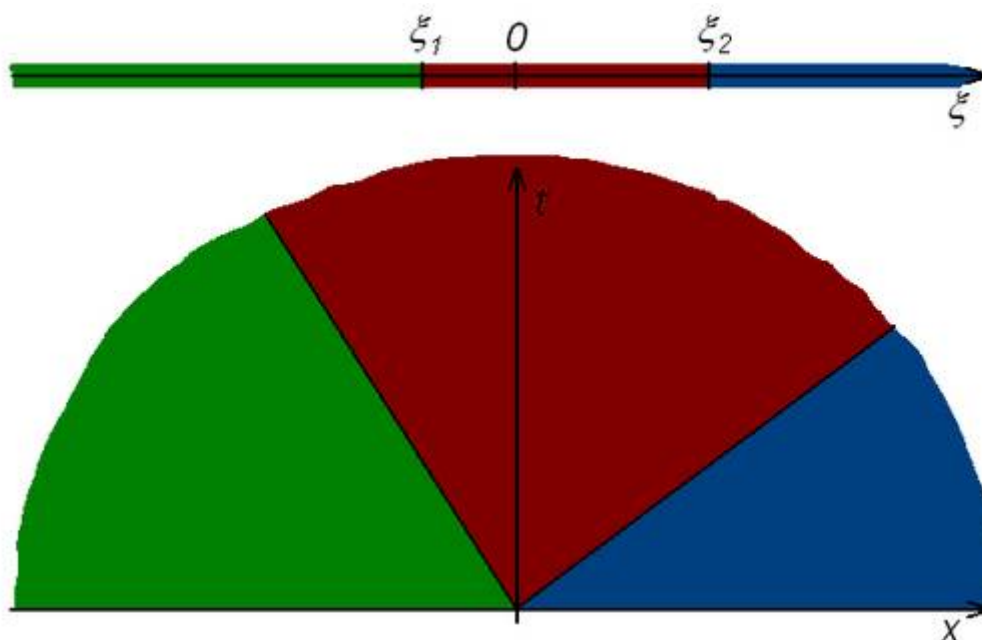
$$\begin{cases} \varphi = \varphi_L \\ v = v_L \end{cases} \text{ para } \xi \in (-\infty, \xi_L] \text{ e } \begin{cases} \varphi = \varphi_R \\ v = v_R \end{cases} \text{ para } \xi \in [\xi_R, +\infty)$$

para algum ξ_L e ξ_R .



Fração de fluido e velocidade em $\pm \infty$

Vale observar que intervalos na reta ξ , correspondem a leques no plano $x \times t$.
(ver figura abaixo)



Correlação entre intervalos no eixo ξ e leques no plano $x \times t$

Um intervalo com solução S_1 não pode encostar em outro com solução S_2 , ou seja; não existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que em $[a, b]$ há solução S_1 e em $[b, c]$ solução S_2 (ou vice versa), pois teríamos que :

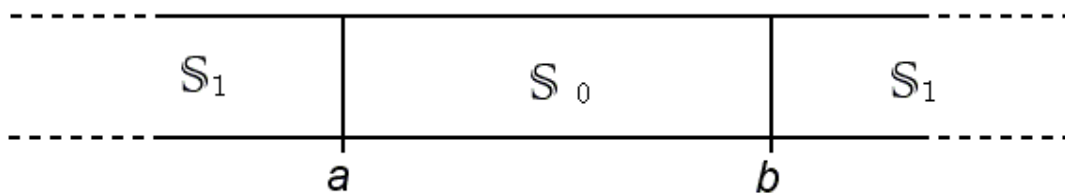
$$b \text{ pertence ao primeiro intervalo} \Rightarrow b = v - \sqrt{p'}$$

$$b \text{ pertence ao segundo intervalo} \Rightarrow b = v + \sqrt{p'}, \text{ logo}$$

$$v - \sqrt{p'} = v + \sqrt{p'} \Rightarrow \sqrt{p'} = 0 \Rightarrow p' = 0$$

que é falso pois por hipótese, $p' > 0$.

Não poderemos ter também um intervalo satisfazendo S_0 entre dois intervalos satisfazendo S_1 (ou S_2)



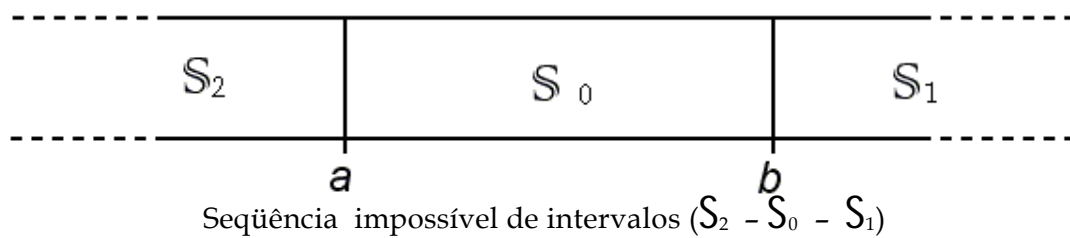
Situação impossível - S_0 entre dois intervalos do mesmo tipo

No intervalo do meio (inclusive em a e b), φ_0 e v_0 são constantes. Como a está no primeiro intervalo, vale : $a = v_0 - \sqrt{p'(\varphi_0)}$. Idem para b no segundo intervalo $b = v_0 - \sqrt{p'(\varphi_0)}$. Portanto:

$$a = v_0 - \sqrt{p'(\varphi_0)} = b$$

ou seja, não há intervalo nenhum no meio.

Também não ocorrerá a situação em que teremos os intervalos na ordem (esquerda para direita) : $S_2 - S_0 - S_1$.



Como a e $b \in [a, b]$, satisfazem S_0 . Teremos para ambos $\varphi = \varphi_0$ e $v = v_0$. Como a satisfaz S_2 e b satisfaz S_1 , teremos ainda:

$$a = v_0 + \sqrt{p'(\varphi_0)}$$

$$b = v_0 - \sqrt{p'(\varphi_0)}$$

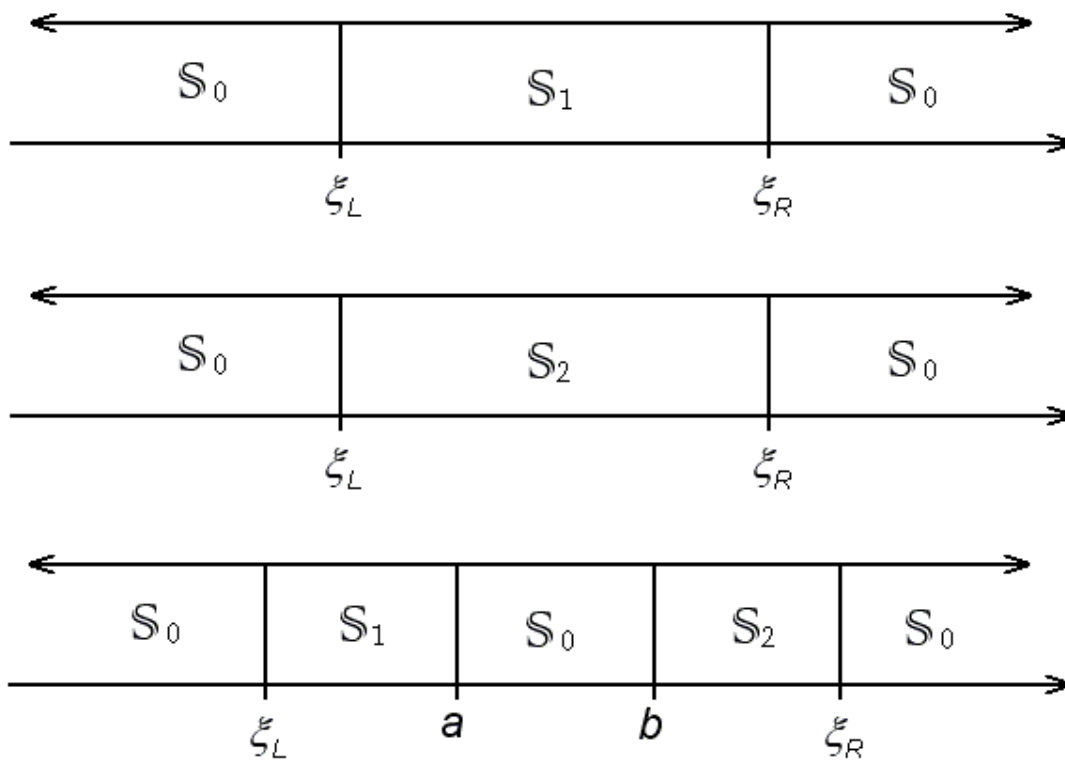
como $a < b$

$$a = v_0 + \sqrt{p'(\varphi_0)} < v_0 - \sqrt{p'(\varphi_0)} = b \Rightarrow \sqrt{p'(\varphi_0)} < 0$$

que é falso.

Construindo as únicas seqüências possíveis de intervalos, para que tenhamos solução contínua, teremos:

- 1- $S_0 - S_1 - S_0 - S_2 - S_0$
- 2- $S_0 - S_1 - S_0$
- 3- $S_0 - S_2 - S_0$



Todas as seqüências possíveis de intervalos

Os valores de φ e v são constantes quando a solução é do tipo S_0 . Para S_1 e S_2 , eles tem que satisfazer as equações diferenciais ordinárias (3.3), e conseqüentemente os respectivos invariantes de Riemann.

Analisando a seqüência $(S_0 - S_1 - S_0)$ podemos facilmente calcular ξ_L e ξ_R , pois :

$$\xi_L = v_L - \sqrt{p'(\varphi_L)} \quad \text{e} \quad \xi_R = v_R - \sqrt{p'(\varphi_R)}$$

Podemos ainda determinar φ e v entre ξ_L e ξ_R resolvendo a equação diferencial ordinária (3.3), com a condição inicial $\varphi = \varphi_L$ e $v = v_L$ em ξ_L . Este problema já terá solução bem definida independente dos valores $\varphi = \varphi_R$ e $v = v_R$ em ξ_R , e tais valores só serão satisfeitos por coincidência. O mesmo ocorre para seqüência $(S_0 - S_2 - S_0)$.

Tais casos dificilmente ocorrerão, e na prática teremos apenas a solução do tipo $(S_0 - S_1 - S_0 - S_2 - S_0)$. Para esta seqüência de intervalos, podemos encontrar ξ_L e ξ_R pois:

$$\xi_L = v_L - \sqrt{p'(\varphi_L)} \quad \text{e} \quad \xi_R = v_R + \sqrt{p'(\varphi_R)}$$

Entre ξ_1 e ξ_2 , $\varphi = \varphi_*$ e $v = v_*$ são constantes, e seus valores estão relacionados por :

$$\xi_1 = v_* - \sqrt{p'(\varphi_*)} \quad \text{e} \quad \xi_2 = v_* + \sqrt{p'(\varphi_*)}$$

Para resolvermos o problema de Riemann, temos ainda de encontrar φ_* e v_* . Como ξ_1 e ξ_2 estão no segundo (S_1) e no quarto (S_2) intervalos ambos estarão sujeitos às equações diferenciais / invariantes de Riemann correspondentes aos seus intervalos:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_L}^{\varphi_*} \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi &= v_L - v_* \quad \text{e} \\ \int_{\varphi_*}^{\varphi_R} \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi &= v_R - v_* \end{aligned} \quad (3.4)$$

que resolvendo as integrais vira um sistema de equações algébricas em φ_* e v_* com uma única solução. Assim teremos uma solução contínua para o problema de Riemann no eixo ξ . Para que esta solução seja coerente, precisamos ainda que:

$$\xi_L < \xi_1 < \xi_2 < \xi_R$$

Sabemos que:

$$\xi_1 = v_* - \sqrt{p'(\varphi_*)} < v_* + \sqrt{p'(\varphi_*)} = \xi_2$$

portanto basta conferir as desigualdades :

$$\xi_L < \xi_1 \quad \text{e} \quad \xi_2 < \xi_R \quad (3.5)$$

Caso alguma das desigualdades (3.5) não seja satisfeita, teremos de encontrar uma solução descontínua para o problema de Riemann. Tal solução terá de satisfazer os princípios físicos da equação do momento linear e da conservação de massa, ou seja, as condições de salto (2.14).

Iremos tratar de agora em diante, do caso $p = c^2 \varphi$, discutido no nosso modelo mecânico do capítulo anterior. Teremos que:

$$p' = c^2 \quad \text{e} \quad \int \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi = c \ln \varphi + cte$$

No caso contínuo, teremos que as integrais (3.4) viram:

$$\begin{aligned} v_L - v_* &= c \ln \left(\frac{\varphi_*}{\varphi_L} \right) \quad \text{e} \\ v_R - v_* &= c \ln \left(\frac{\varphi_R}{\varphi_*} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Resolvendo o sistema, encontraremos:

$$\begin{aligned} \varphi_* &= \sqrt{\varphi_L \varphi_R} e^{\left(\frac{v_L - v_R}{2c} \right)} \\ v_* &= \frac{v_L + v_R}{2} + \frac{c}{2} \ln \left(\frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Podemos agora verificar as condições para existência de uma solução contínua através das desigualdades (3.5):

$$\begin{cases} \xi_L < \xi_1 \Rightarrow v_L - c < v_* - c \Rightarrow v_L < v_* \\ \xi_2 < \xi_R \Rightarrow v_* + c < v_R + c \Rightarrow v_* < v_R \end{cases} \quad (3.8)$$

substituindo o valor de v_* da equação (3.7)

$$\begin{aligned} v_L < \frac{v_L + v_R}{2} + \frac{c}{2} \ln \left(\frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right) < v_R \Rightarrow \\ \frac{v_L - v_R}{2} < \frac{c}{2} \ln \left(\frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right) < \frac{v_R - v_L}{2} \end{aligned}$$

que implica:

$$c \left| \ln \left(\frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right) \right| < v_R - v_L \quad (3.9)$$

que é a desigualdade que deve ser atendida para se garantir a existência de solução contínua.

Teremos também desigualdades para a fração de fluido φ :

$$v_L < v_* \Rightarrow v_L - v_* = c \ln \left(\frac{\varphi_*}{\varphi_L} \right) < 0 \Rightarrow \frac{\varphi_*}{\varphi_L} < 1$$

analogamente para φ_R teremos então:

$$\varphi_L > \varphi_* \quad \text{e} \quad \varphi_R > \varphi_* \quad (3.10)$$

Na Literatura clássica estas soluções que encontramos associadas a S_1 e S_2 , são chamadas de **rarefações**, nome que surgiu na dinâmica de gases. O nome também tem justificativa física no nosso problema, visto que a fração de fluido

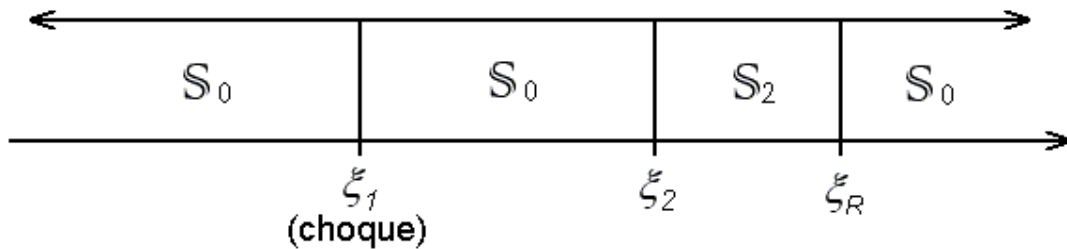
encontrada (φ_*) é menor que as frações de fluido iniciais (φ_L e φ_R). Na solução contínua, iremos nos referir as rarefações associadas à S_1 e S_2 , por rarefação-1 e rarefação-2.

Supondo que alguma ou ambas as desigualdades em (3.10) não sejam satisfeitas, teremos que buscar uma solução descontínua para o problema de Riemann.

Analisando inicialmente o caso

$$\varphi_* > \varphi_L \quad \text{e} \quad \varphi_R > \varphi_* \quad (3.11)$$

encontraríamos que o segundo intervalo não existe, visto que o ponto final do intervalo seria menor que o inicial ($\xi_L > \xi_1$ e $\xi_2 < \xi_R$). Não há problema em relação ao quarto intervalo; continua valendo S_2 . Buscaremos uma solução sem o segundo intervalo, e teremos uma descontinuidade/choque entre o primeiro e o “terceiro” intervalo, no ponto que chamaremos de ξ_1 . Iremos nos referir a este caso como choque-1 rarefação-2, e teremos de usar as condições de salto (2.14) em ξ_1 .



Seqüência de intervalos para choque-1 / rarefação-2

Recalculando os pontos da reta ξ , através de um novo sistema constituído por (2.14) e (3.6):

$$\begin{cases} \xi_1 = s_1 = \frac{\varphi_* v_* - \varphi_L v_L}{\varphi_* - \varphi_L} = \frac{c^2 \varphi_* + \varphi_* v_*^2 - c^2 \varphi_L - \varphi_L v_L^2}{\varphi_* v_* - \varphi_L v_L} \\ v_R - v_* = c \ln \left(\frac{\varphi_R}{\varphi_*} \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

Apesar da descontinuidade ser em ξ_1 , o valor de ξ_2 terá de ser recalculado, porém as desigualdades (3.11) se mantém, visto que as curvas de choque e de rarefação tem contato C^2 no espaço de estados (φ, v) .

Simplificando a primeira equação do sistema (3.12), obtemos:

$$v_* = v_L \pm c \frac{(\varphi_* - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_* \varphi_L}}$$

A solução $v_* = v_L + c \frac{(\varphi_* - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_* \varphi_L}}$ nos conduz a resultados que satisfaz a desigualdade

(3.9) (cálculo consiste em substituir v_* da solução acima, em (3.6)), portanto a solução seria do tipo rarefação-1/rarefação-2, e não haveria descontinuidade, que é falso. A única solução válida seria :

$$\begin{aligned} v_* &= v_L - c \frac{(\varphi_* - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_* \varphi_L}} \\ v_* &= v_R - c \ln \left(\frac{\varphi_R}{\varphi_*} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde concluímos que :

$$v_* < v_R \quad \text{e} \quad v_* < v_L \quad (3.14)$$

O sistema (3.13) pode ser resolvido, determinando os valores de v_* e φ_* . Manipulando algebricamente as inequações (3.11) e as relações (3.13), chegaremos em uma condição suficiente para a existência de uma solução do tipo choque-1/rarefação-2 :

$$c \ln \left(\frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right) < v_L - v_R < c \frac{(\varphi_R - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_R \varphi_L}} \quad (3.15)$$

Uma análise análoga para os casos $\varphi_L > \varphi_*$ e $\varphi_* > \varphi_R$ (rarefação-1/choque-2) e $\varphi_* > \varphi_L$ e $\varphi_* > \varphi_R$ (choque-1/choque-2) nos fornecerão:

- Rarefação-1/choque-2

$$\begin{aligned} v_* &= v_L + c \ln \left(\frac{\varphi_L}{\varphi_*} \right) \\ v_* &= v_R + c \frac{(\varphi_* - \varphi_R)}{\sqrt{\varphi_* \varphi_R}} \\ v_* &> v_R \quad \text{e} \quad v_* > v_L \end{aligned}$$

condições suficientes para existência de solução:

$$c \frac{(\varphi_R - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_R \varphi_L}} < v_R - v_L < c \ln \left(\frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right)$$

- Choque-1/choque-2

$$v_* = v_L - c \frac{(\varphi_* - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_* \varphi_L}}$$

$$v_* = v_R + c \frac{(\varphi_* - \varphi_R)}{\sqrt{\varphi_* \varphi_R}}$$

$$v_R < v_* < v_L$$

condição suficiente:

$$c \left| \frac{(\varphi_R - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_R \varphi_L}} \right| < v_L - v_R$$

Condições para as 4 possibilidades de solução para o problema de Riemann

se	então a solução é do tipo
$v_R - v_L > c \left \ln \frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right $	Rarefação-1/rarefação-2
$-c \left[\sqrt{\frac{\varphi_R}{\varphi_L}} - \sqrt{\frac{\varphi_L}{\varphi_R}} \right] > v_R - v_L$	Choque-1/choque-2
$c \left[\sqrt{\frac{\varphi_R}{\varphi_L}} - \sqrt{\frac{\varphi_L}{\varphi_R}} \right] < v_R - v_L < c \ln \frac{\varphi_L}{\varphi_R}$	Rarefação-1/choque-2
$-c \left[\sqrt{\frac{\varphi_R}{\varphi_L}} - \sqrt{\frac{\varphi_L}{\varphi_R}} \right] < v_R - v_L < -c \ln \frac{\varphi_L}{\varphi_R}$	Choque-1/rarefação-2

4 A TRANSIÇÃO INSATURADO - SATURADO

Devido à incompressibilidade do líquido e à rigidez da matriz porosa, o problema resolvido no capítulo anterior:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\varphi v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \varphi v^2) = 0 \end{cases}$$

juntamente com a condição inicial:

$$(\varphi, v) = \begin{cases} (\varphi_L, v_L) & \text{para } x < 0 \\ (\varphi_R, v_R) & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad \text{em } t=0$$

só tem sentido físico se a restrição $\varphi \leq \varepsilon$ for satisfeita em toda parte, para qualquer instante de tempo. Seu significado é que o poro não pode comportar mais líquido do que cabe nele. Dos quatro tipos de solução possíveis para o problema hiperbólico sob investigação, 3 satisfazem essa restrição físico/geométrica, lembrando que as condições iniciais sobre a fração de fluido (φ_L e φ_R) serão sempre menores que a porosidade ε , isto é:

$$\varphi_L < \varepsilon \quad \text{e} \quad \varphi_R < \varepsilon$$

Quando a solução for do tipo:

- Rarefação-1/Rarefação-2, o estado intermediário será tal que

$$\varphi_* < \varphi_L < \varepsilon \quad \text{e} \quad \varphi_* < \varphi_R < \varepsilon \quad (\text{solução contínua}).$$

- Choque-1/Rarefação-2, o estado intermediário será tal que

$$\varphi_L < \varphi_* < \varphi_R < \varepsilon.$$

- Rarefação-1/Choque-2, o estado intermediário será tal que

$$\varphi_R < \varphi_* < \varphi_L < \varepsilon.$$

Em todos os casos citados acima, fica assegurada a desigualdade $\varphi < \varepsilon$ em toda parte. O único caso em que não podemos garantir que $\varphi < \varepsilon$, é o caso Choque-1/Choque-2, pois teremos:

$$\varphi_L < \varphi_* \quad \text{e} \quad \varphi_R < \varphi_*$$

que não limita φ_* superiormente. Uma solução em que $\varphi_* > \varepsilon$, não é fisicamente aceitável. Além disso, quando a fração de fluido tiver o mesmo valor da porosidade, a pressão não será mais uma função da fração de fluido.

O modelo mecânico tratado no capítulo anterior, não se aplica a partir do instante que houver saturação ($\varphi_* = \varepsilon$). Apesar disto, mesmo num contexto onde há descontinuidade, as equações do momento linear e da conservação de massa, continuam válidas, em outras palavras, valem as condições de salto (2.14), porém, não poderemos usar a relação constitutiva para pressão ($p = c^2 \varphi_*$), já que a partir da saturação, a fração de fluido irá se manter constante. Substituindo $\varphi_* = \varepsilon$ nas condições de salto (2.14), obtemos:

$$\xi_1 = \frac{\varepsilon v_* - \varphi_L v_L}{\varepsilon - \varphi_L} = \frac{\varepsilon v_*^2 - \varphi_L v_L^2 + p_* - c^2 \varphi_L}{\varepsilon v_* - \varphi_L v_L}$$

$$\xi_2 = \frac{\varphi_R v_R - \varepsilon v_*}{\varphi_R - \varepsilon} = \frac{\varphi_R v_R^2 - \varepsilon v_*^2 + c^2 \varphi_R - p_*}{\varphi_R v_R - \varepsilon v_*}$$

que é um sistema de 2 equações em 2 incógnitas: v_* e p_* . Efetuando algumas simplificações, ficamos com:

$$(v_* - v_L)^2 = (p_* - c^2 \varphi_L) \left(\frac{1}{\varphi_L} - \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

$$(v_* - v_R)^2 = (p_* - c^2 \varphi_R) \left(\frac{1}{\varphi_R} - \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Apesar de cada equação do sistema fornecer 2 valores para v_* , somente um será admitido, por motivos já discutidos no capítulo anterior (condições de entropia), portanto

$$v_* = v_L - \sqrt{(p_* - c^2 \varphi_L) \left(\frac{1}{\varphi_L} - \frac{1}{\varepsilon} \right)}$$

$$v_* = v_R + \sqrt{(p_* - c^2 \varphi_R) \left(\frac{1}{\varphi_R} - \frac{1}{\varepsilon} \right)}$$

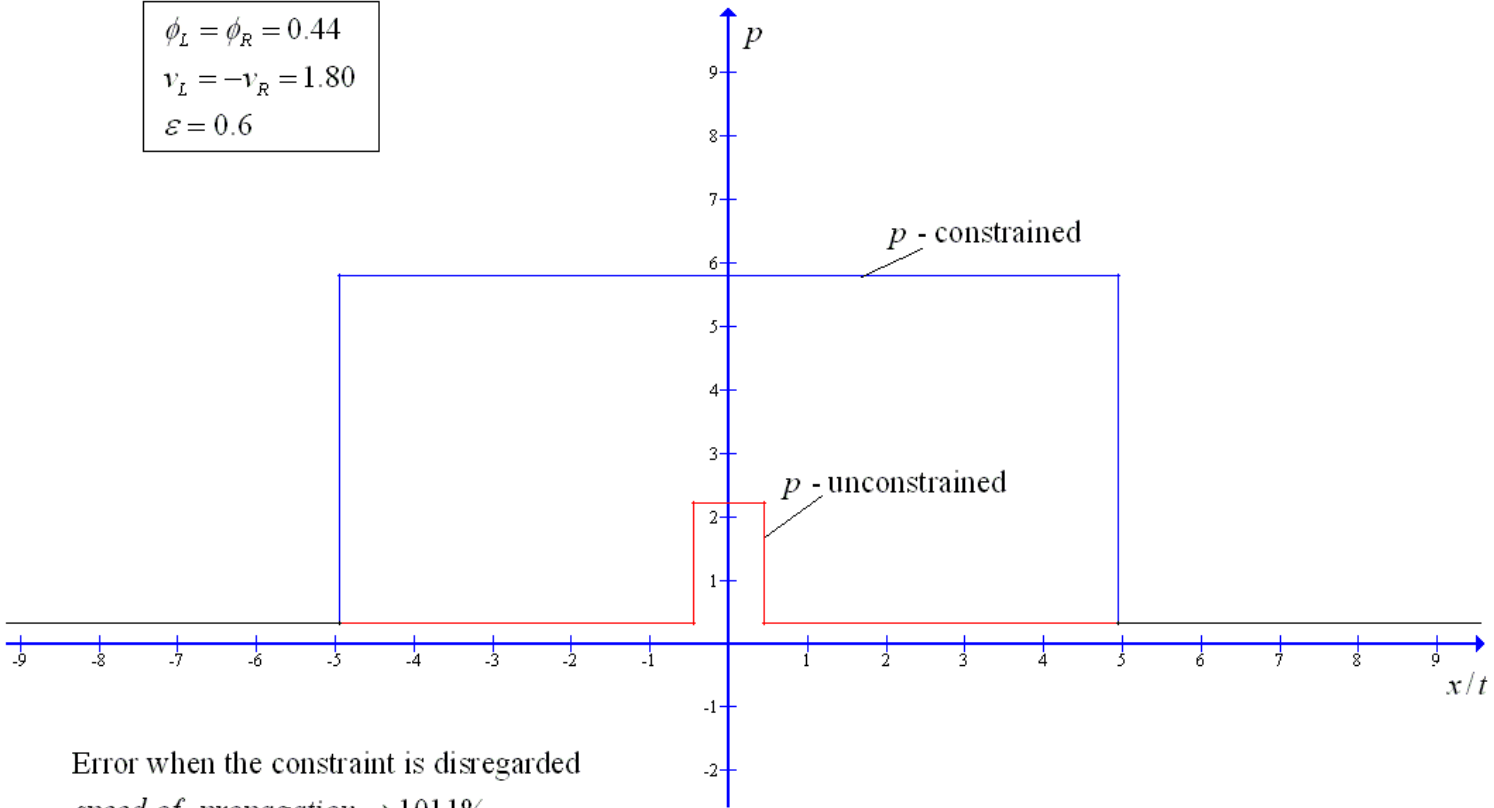
A seguir, mostraremos algumas simulações onde podemos comparar a solução obtida com e sem a restrição geométrica $\varphi \leq \varepsilon$. Estaremos simulando o caso choque-1/choque-2 com a fração de fluido à esquerda igual à direita ($\varphi_L = \varphi_R$) e com

velocidades de aproximação simétricas ($v_L = -v_R$). Teremos resultados para fração de fluido (φ_*), pressão (p_*) e velocidade de propagação (s). Observe que s não é a velocidade do componente líquido após o choque, e sim a velocidade da onda de choque. Mostraremos também a discrepância percentual entre os resultados com e sem restrição $\left(\frac{(\text{com}) - (\text{sem})}{(\text{sem})} \right)$, chamando a atenção que os resultados onde $\varphi > \varepsilon$ não tem sentido físico.

Em outras palavras “com restrição” e “sem restrição” não são apenas uma questão de opção de simulação. São dois contextos: o primeiro sempre tem sentido físico, enquanto o segundo representa um problema meramente matemático (e bem mais simples).

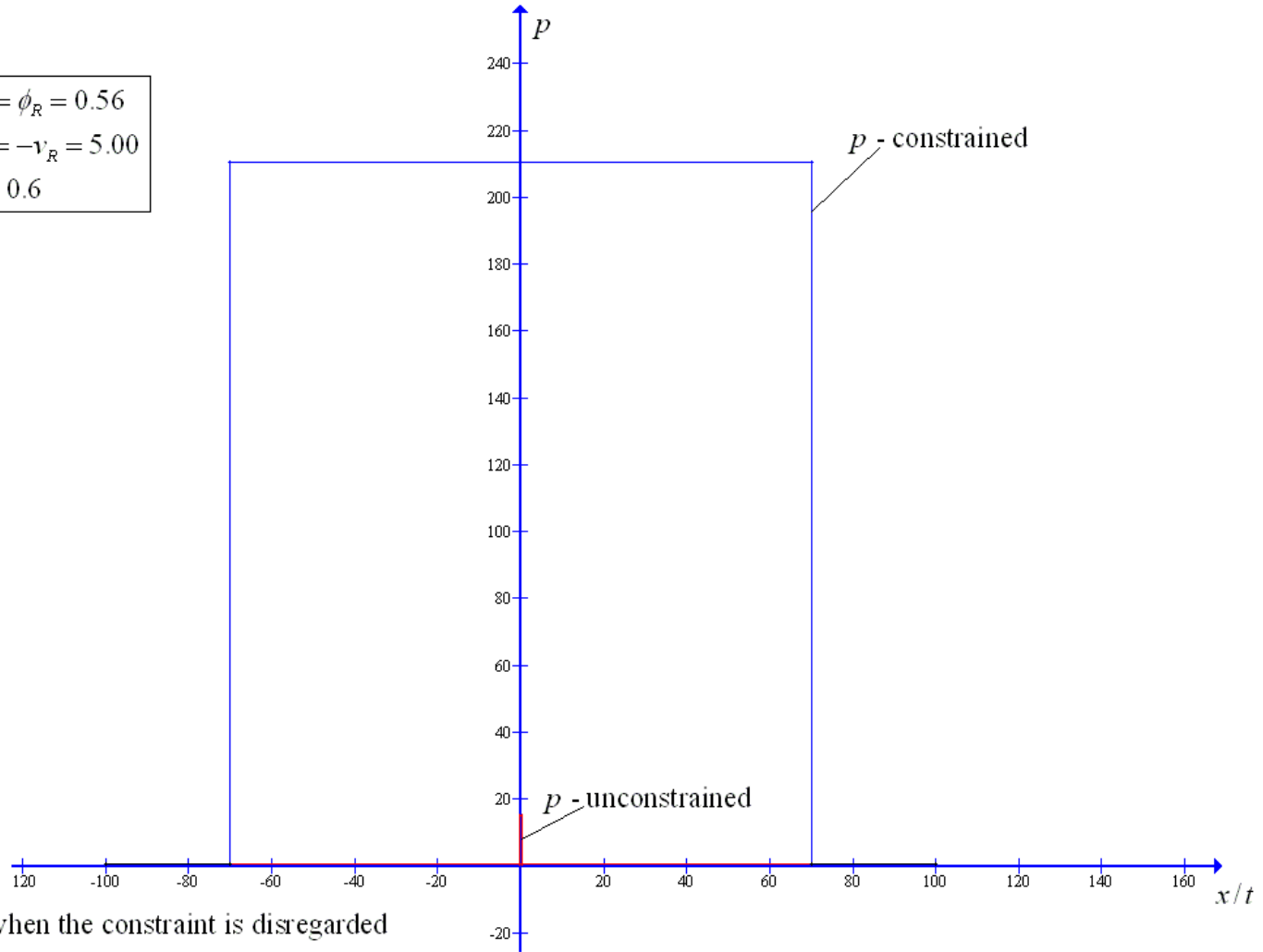
DADOS INICIAIS		SEM RESTRIÇÃO			COM RESTRIÇÃO			DISCREPÂNCIAS	
$\varphi_L = \varphi_R$	$v_L = -v_R$	φ_*	s	ρ_*	φ_*	s	ρ_*	Pressão	Velocidade propagação
0,20	0,05	0,21	0,975	0,21	0,21	0,975	0,21	0,00%	0,00%
0,20	0,20	0,244	0,905	0,244	0,244	0,905	0,244	0,00%	0,00%
0,32	0,45	0,50	0,80	0,50	0,50	0,80	0,50	0,00%	0,00%
0,32	0,80	0,698	0,677	0,698	0,60	0,914	0,759	8,70%	35,04%
0,32	1,25	1,042	0,554	1,042	0,60	1,429	1,391	33,57%	157,75%
0,44	1,80	2,218	0,445	2,218	0,60	4,95	5,786	160,83%	1011,45%
0,44	3,20	5,349	0,287	5,349	0,60	8,80	17,336	224,07%	2968,38%
0,56	4,05	10,275	0,233	10,275	0,60	56,70	138,341	1246,40%	24187,18%
0,56	5,00	15,099	0,193	15,099	0,60	70,00	210,560	1294,51%	36248,05%
0,56	6,05	21,603	0,161	21,603	0,60	84,70	308,021	1325,83%	52507,17%

$$\begin{aligned} \phi_L = \phi_R &= 0.44 \\ v_L = -v_R &= 1.80 \\ \varepsilon &= 0.6 \end{aligned}$$



Error when the constraint is disregarded
speed of propagation \rightarrow 1011%
pressure \rightarrow 161%

$$\begin{aligned} \phi_L = \phi_R &= 0.56 \\ v_L = -v_R &= 5.00 \\ \varepsilon &= 0.6 \end{aligned}$$



Error when the constraint is disregarded

speed of propagation $\rightarrow 36248\%$

pressure $\rightarrow 1294\%$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A contribuição principal deste trabalho foi a descrição do processo de saturação num meio porosos rígido, levando em conta as restrições geométricas impostas pela incompressibilidade do líquido e pela rigidez do meio poroso.

Tais restrições, oriundas da realidade física, vinham sendo sistematicamente desconsiderada em trabalhos anteriores onde, muitas vezes, a quantidade de líquido presente numa região superava o máximo admissível.

As consequências da não imposição de limites para a quantidade de líquido nos poros era, além da aberração física, a obtenção de pressões muito abaixo das reais e de velocidades de propagação muito menores do que as fisicamente realistas. Dessa forma, diversos processos eram simulados longe da sua realidade física. Por exemplo, sem o uso da restrição, dificilmente poderíamos prever a fratura de um meio poroso.

O uso da restrição deu origem a uma nova classe de problemas de Riemann, cuja solução era desconhecida. Uma das contribuições desse trabalho foi apresentar a solução exata para um problema de Riemann com uma variável sujeita a uma restrição (um limite) físico. Certamente outros surgirão...

De maneira nenhuma esse trabalho é considerado uma solução definitiva para o processo de transição insaturado-saturado. Ele é um ponto de partida. Mas, antes de tudo, é uma prova de que podemos nos aproximar muito mais da realidade física e um bom motivo para que não aceitemos resultados provenientes de situações virtuais, convenientemente manipuladas.

Este trabalho tem várias continuações naturais como, por exemplo, a simulação de problemas com condições iniciais quaisquer e/ou o emprego de novas relações constitutivas para a pressão.

Além disso, levando em conta os efeitos da transição insaturado-saturado aqui descritos, é intenção do autor simular o processo de propagação de poluentes e/ou contaminantes em contextos onde haja transição insaturado-saturado.

O uso de aproximantes de Riemann também faz parte do espectro de trabalhos futuros pretendidos pelo autor.

REFERÊNCIAS

- [1] ALAZMI, B.; VAFAI, K. *Analysis of variants within the porous models*. J. Heat Transfer 122. 303-326, 2000.
- [2] APOSTOL, T.M. *Mathematical Analysis* 2ª ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1974.
- [3] ARIS, R. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. New Jersey: Prentice-Hall, 1962.
- [4] ASPLUND, E. ; BUNGART, L. *A first course in integration*. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1966.
- [5] ATKIN, R.J. ; CRAINE, R.E. *Continuum theories of mixtures. Basic theory and historical development*. Q.J. Mech. Appl. Math. 29. 209-244, 1976.
- [6] AW, A. ; RASCLE, M. *Resurrection of "second order" models of traffic flow*. SIAM J. Appl. Math. 60. 916-938, 2000.
- [7] BERTHELIN, F. ; DEGOND T. ; DELITALA, M. ; RASCLE, M. *A model for the formation and evolution of traffic jams*. Arch. Ration. Mech. Anal. 187. 185-220, 2008.
- [8] BISHOP, R.L. ; GOLDBERG, S.I. *Tensor analysis on manifold*. New York: Dover publications, 1968.
- [9] CHADWICK, P. *Continuum Mechanics*. London: George Allen & Unwin, 1976.
- [10] COLOMBO, R.M. ; GOATIN, P. *A well posed conservation law with a variable unilateral constraint*. J. Differ. Equ. 234. 654-675, 2007.
- [11] DAGANZO, C. *Requiem for second order fluid approximations of traffic flow*. Transp. Res. B 29. 277-286, 1995.
- [12] DESLOGE, E. A. *Classical Mechanics vol.1*. Florida: Krieger publishing co., 1989.
- [13] DESPRÉS, B. ; LAGOUTIÈRE, F. ; SEGUIN, N. *Weak solutions to Friedrichs systems with convex constraints*. Nonlinearity 24. 3055-3081, 2011.
- [14] FEYNMAN, R.P. ; LEIGHTON, R.B. ; SANDS, M. *The Feynman lectures on Physics vol.1*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1964.

- [15] FRENCH, A.D. *Newtonian Mechanics*. London: W.W. Norton & Co., 1970.
- [16] GAMA, R.M.S. ; PEDROSA F., J.J. ; MARTINS COSTA, M.L. *Modeling the saturation process of flows through rigid porous media by the solution of a nonlinear hyperbolic system with one constraint unknown*. J. Appl. Math. Mech. 92. 921-936, 2012.
- [17] GARABEDIAN, P.R. *Partial differential equations*. New York: John Wiley & Sons, 1964.
- [18] MARTINS COSTA, M.L. ; GAMA, R.M.S. *Numerical simulation of one-dimensional flows through porous media with shock waves*. Int. J. Numer. Methods Eng. 52. 1047-1067, 2001.
- [19] ROSSMANITH, J.A. *A high-resolution constrained transport method with adaptive mech refinement for ideal MHD*. Comput. Phys. Commun. 164. 128-133, 2004.
- [20] SLATTERY, C. *Advanced transport phenomena*. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [21] SMOLLER, J. *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [22] SPENCER, A.J.M. *Continuum Mechanics*. London: Longman, 1980.

APÊNDICE A – Continuidade da Densidade

Diremos que a densidade em um ponto P vale ρ , sempre que:
 dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } A \subset B(P, \delta) \Rightarrow \left| \frac{M(A)}{V(A)} - \rho \right| < \varepsilon$$

onde $B(P, \delta)$ corresponde a bola de centro P e raio δ , $M(A)$ massa e $V(A)$ volume limitados por A , uma região Jordan-mensurável. Vale então :

Proposição :

Se ρ está definida em um aberto A em \mathbb{R}^3 , então ρ é contínua em A

Seja $x \in A$; dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ com $B(x, \delta) \subset A$, tal que se $R \subset B(x, \delta)$ então

$$\left| \frac{M(R)}{V(R)} - \rho(x) \right| < \varepsilon / 2$$

se $y \in B(x, \delta)$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $R \subset B(y, \delta_1) \subset A \Rightarrow \left| \frac{M(R)}{V(R)} - \rho(y) \right| < \varepsilon / 2$

se tomarmos $R = B(x, \delta) \cap B(y, \delta_1)$, sabemos que R é aberto (interseção de abertos) e não vazia pois y pertence à R e como R está contido em $B(x, \delta)$ e $B(y, \delta_1)$ temos :

$$\left| \frac{M(R)}{V(R)} - \rho(x) \right| + \left| \frac{M(R)}{V(R)} - \rho(y) \right| < \varepsilon \Rightarrow |\rho(x) - \rho(y)| < \varepsilon$$

que vale para qualquer $y \in B(x, \delta)$, portanto ρ é contínuo em qualquer $x \in A$, ou seja, ρ é contínuo em A .

APÊNDICE B – A Substituição $\xi = x/t$ em Leis de Conservação

As equações diferenciais parciais do tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(f(u))}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.1})$$

são chamadas de leis de conservação em analogia a alguns sistemas físicos. A substituição $\xi = x/t$ surge quando buscamos uma solução contínua para (B.1) com $t \geq 0$ e condição inicial :

$$u(x,0) = \begin{cases} U_L & \text{se } x < 0 \\ U_R & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{com } U_L \neq U_R$$

A condição inicial possui uma descontinuidade em $(0, 0)$. Iremos procurar uma solução contínua em :

$$\mathcal{R} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0 \text{ e } (x,t) \neq (0,0)\}$$

ou seja, a única descontinuidade estará na origem. Reescrevendo (B.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = (f'(u), 1) \cdot \nabla u = 0 \quad (\text{B.2})$$

Analisando as curvas de nível $u = \text{cte}$, teremos que $f'(u) = C$ também será constante, e por (B.2):

$$\nabla u \cdot (C, 1) = 0$$

Como a curva de nível é sempre perpendicular a ∇u , o vetor $(C, 1)$ será sempre paralelo a sua reta tangente, ou seja; **a curva de nível será uma reta**. Sabemos que curvas de nível para diferentes valores de u , não podem se interceptar, nem interceptar os semi-eixos $x > 0$ e $x < 0$, pois u vale U_L e U_R (respectivamente) nos semi-eixos. Uma forma de não ocorrer esta intercessão, seria tomar retas paralelas ao eixo x , porém tal solução não seria contínua em $t = 0$, pois u não pode tender simultaneamente para U_L e U_R . A única forma de não haver descontinuidade em \mathcal{R} seria se todas as curvas de nível (retas) se interceptarem na origem, já que a origem $(0,0)$ não pertence a \mathcal{R} . Sendo assim, as curvas de nível serão as retas da forma :

$$x = \xi t$$

portanto os pontos onde u é constante correspondem aos pontos em que $\xi = x/t$ logo u é função de $\xi = x/t$.

APÊNDICE C - O Esquema de Glimm

James Glimm introduziu o Método de Escolha Aleatória como uma prova construtiva da existência de soluções para uma classe de sistemas de leis de conservação hiperbólicos não lineares. A teoria deste método tem como base o estudo das iterações de ondas elementares na solução do problema de Riemann, cuja formulação matemática apresenta uma forte base termodinâmica – representada pela condição de entropia.

O Método de Glimm é uma técnica semianalítica para tratar soluções descontínuas de sistemas hiperbólicos de leis de conservação, no qual soluções aproximadas são representadas por funções constantes por partes.

Chorin modificou o método original e o transformou em uma ferramenta computacional para a solução numérica de leis de conservação hiperbólicas homogêneas. Colella propôs um procedimento mais preciso e investigou uma extensão do esquema de Glimm a sistemas bidimensionais usando o método de partição do operador.

Entre as principais características do método de Glimm estão a sua capacidade de não dissipar o choque, preservando assim, a sua magnitude e posição, além do baixo custo computacional se comparado a outros métodos de aproximação de problemas não lineares como o método de elementos finitos associado a uma técnica de captura de choques, por exemplo. Além disto, quando o comprimento dos passos tomados em relação à variável espacial tende a zero, a aproximação obtida tende a solução exata do problema, considerando, neste caso, a sua solução fraca.

No entanto, tal método apresenta uma inconveniente desvantagem uma vez que sua implementação, na simulação de problemas de valor inicial, requer o conhecimento prévio da solução completa do problema de Riemann associado a sistemas hiperbólicos.

Em essência, o método consiste em um procedimento numérico que utiliza a solução do problema de Riemann associado na geração de soluções aproximadas de equações hiperbólicas, sujeitas a condições iniciais arbitrárias. Os problemas de

Riemann são problemas de valor inicial cuja condição inicial é, necessariamente, uma função degrau. Como o esquema de Glimm constrói a solução para um problema de valor inicial a partir da solução de um certo número pré-determinado de problemas de Riemann associados, para marchar no tempo de um instante $t = t_n$ a um instante $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, a condição inicial arbitrária deve ser aproximada por funções constantes por partes.

A fim de evitar uma interação direta entre choques referentes a dois problemas de Riemann consecutivos, o avanço de tempo Δt deve ser escolhido de tal forma a satisfazer a condição de Courant-Friedrichs-Lewy, assegurando, desta forma, a unicidade da solução, ou seja,

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \leq \frac{\Delta x}{2|\lambda|_{\max}} \quad (\text{C.1})$$

onde $|\lambda|_{\max}$ é a velocidade máxima de propagação, em valor absoluto, da descontinuidade considerando todos os problemas de Riemann no tempo t_n , ou seja, a norma do valor máximo dos autovalores do sistema.

O método de Glimm permite, assim, a construção de uma solução para problemas de valor inicial - conhecidos como sistemas hiperbólicos não lineares sujeitos a valores iniciais arbitrários - através da solução de um certo número de problemas de Riemann associados. A condição inicial arbitrária, dada por uma função da posição x é aproximada por funções constantes por partes, conhecidas como funções degrau. Em seguida, um problema de Riemann - um problema de valor inicial cuja condição inicial é necessariamente uma função degrau - deve ser resolvido para cada dois passos consecutivos.

Desta forma, o objetivo deste método é unir de forma apropriada a solução de tantos problemas de Riemann quantos forem necessários para evoluir de forma sucessiva de um tempo $t = t_n$ para um tempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Este procedimento pode ser facilmente compreendido através da ilustração de um degrau genérico em um plano $x \times t$, mostrado na Figura abaixo.

problema de valor inicial, aproximando os dados iniciais por funções constantes por partes - as funções degrau, com degraus de mesma largura.

Antes de empregar o esquema de Glimm para a resolução das equações (C.2)-(C.3), a solução (ou aproximação) do problema de Riemann associado deve ser conhecida.

Como (C.2) pode estar sujeita a quaisquer dados iniciais arbitrários é conveniente representá-los como:

$$\begin{aligned} F(x,0) &= F_0(x) \\ G(x,0) &= G_0(x) \\ H_i(x,0) &= H_{i_0}(x) \end{aligned} \quad (C.4)$$

Assim, (C.2) e (C.4) caracterizam um problema de valor inicial. A implementação do esquema de Glimm requer a aproximação das condições iniciais (C.4) por funções degrau que, para o problema considerado neste trabalho, serão consideradas funções com larguras iguais a dos passos.

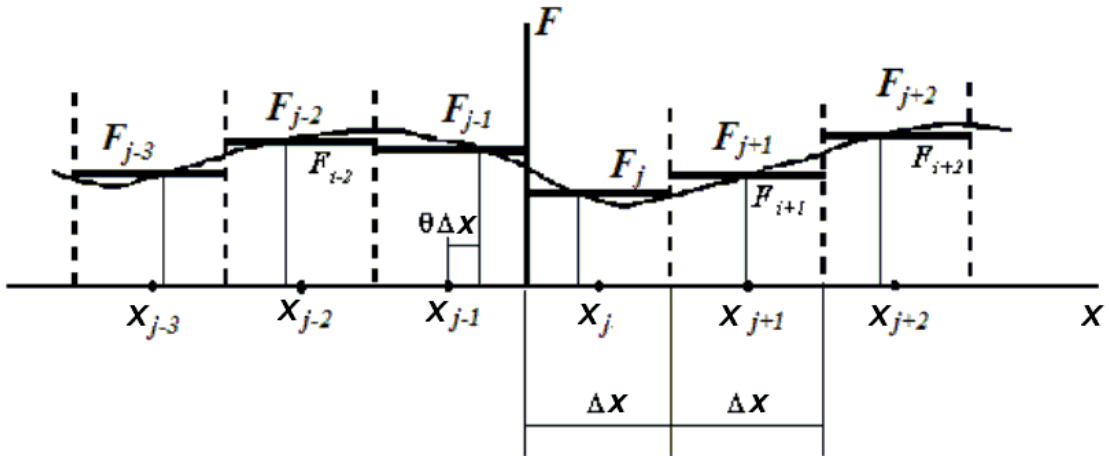
O primeiro procedimento para empregar este esquema é aproximar os dados iniciais (no tempo t_n) pelas funções constantes por partes apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} F &= \hat{F}_n(x) \approx F_{n_j} = \hat{F}_n(x_j + \theta_n \Delta x) & \text{para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \\ G &= \hat{G}_n(x) \approx G_{n_j} = \hat{G}_n(x_j + \theta_n \Delta x) & \text{para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \\ H &= \hat{H}_{i_n}(x) \approx H_{i_{n_j}} = \hat{H}_{i_n}(x_j + \theta_n \Delta x) & \text{para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \end{aligned} \quad (C.5)$$

onde, como mencionado anteriormente, θ_n é um número escolhido aleatoriamente

no intervalo $\left] -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right[$ e Δx é o tamanho de cada passo ($\Delta x = x_{i+1} - x_i$). Tal

procedimento é ilustrado pela aproximação mostrada na Figura:



Construção de uma distribuição constante por partes para uma função F

As aproximações mostradas na equação (C.5) para os dados iniciais geram, para cada dois degraus consecutivos, um problema de valor inicial conhecido como problema de Riemann, associado às equações (C.2)-(C.3) desde que algumas condições sejam verificadas. Primeiro, o sistema deve ser hiperbólico e genuinamente não linear. A fim de garantir essa hipótese, a primeira derivada da pressão em relação a massa específica, p' , deve ser positiva. Além disto, o problema de Riemann representa um tipo especial de problema de valor inicial definido, neste caso, como:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{G^2}{F} + p(F) \right) = 0 \\ \frac{\partial H_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{GH_i}{F} \right) = 0 \quad i = 1, m \end{cases} \quad (C.6)$$

com

$$\begin{aligned} (F, G, H) &= (F_{n_j}, G_{n_j}, H_{i_{n_j}}) \quad \text{para } t = t_n, \quad -\infty < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \\ (F, G, H) &= (F_{n_{j+1}}, G_{n_{j+1}}, H_{i_{n_{j+1}}}) \quad \text{para } t = t_n, \quad x_j + \frac{\Delta x}{2} < x < \infty \end{aligned} \quad (C.7)$$

Seja $\bar{F}_{n_j}, \bar{G}_{n_j}$ e $\bar{H}_{i_{n_j}}$ a solução generalizada das equações (C.6) - (C.7). Então, a aproximação para a solução das equações (C.2) - (C.3) no tempo t_{n+1} é dada por:

$$\begin{aligned}
F &= \hat{F}_{n+1}(x) \approx \bar{F}_{n_j}(x, t_{n+1}) & \text{para } x_j < x < x_{j+1} \\
G &= \hat{G}_{n+1}(x) \approx \bar{G}_{n_j}(x, t_{n+1}) & \text{para } x_j < x < x_{j+1} \\
H &= \hat{H}_{i_{n+1}}(x) \approx \bar{H}_{i_{n_j}}(x, t_{n+1}) & \text{para } x_j < x < x_{j+1}
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Após cada avanço no tempo, a solução obtida não mais representa uma função degrau. Assim sendo, uma nova escolha aleatória é necessária que permita construir a condição inicial na forma de uma função degrau para realizar a evolução no tempo de um dado instante t_n para o próximo instante t_{n+1} , empregando o método de Glimm.

Se a solução para um dado instante de tempo t_n for conhecida, os dados iniciais para o próximo degrau, t_{n+1} , são aproximados por:

$$\begin{aligned}
F_{j_n} &= F(x_j + \theta_n \Delta x, t_n) & \text{para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \\
G_{j_n} &= G(x_j + \theta_n \Delta x, t_n) & \text{para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \\
H_{i_{j_n}} &= H_i(x_j + \theta_n \Delta x, t_n) & \text{para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2}
\end{aligned} \tag{C.9}$$