



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Ciências e Tecnologia

Faculdade de Engenharia

Rodolfo do Lago Sobral

**Simulação do processo de transferência de calor não linear
condução-radiação por meio de um esquema linear em diferenças finitas**

Rio de Janeiro

2014

Rodolfo do Lago Sobral

**Simulação do processo de transferência de calor não linear
condução-radiação por meio de um esquema linear em diferenças finitas**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama

Coorientador: Prof. Dr. Eduardo Dias Corrêa

Rio de Janeiro

2014

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S677 Sobral, Rodolfo do Lago.
Simulação do processo de transferência de calor não linear
condução-radiação por meio de um esquema linear em diferenças
finitas / Rodolfo do Lago Sobral – 2014.
91f.

Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Mecânica. 2. Transferência de Calor -
Dissertações. I. Gama, Rogério Martins Saldanha da. II.
Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Título.

621:536.2

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta
dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Rodolfo do Lago Sobral

**Simulação do processo de transferência de calor não linear
condução-radiação por meio de um esquema linear em diferenças finitas**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em: 19 de agosto de 2014.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama (Orientador)
Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. Eduardo Dias Corrêa (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. José Júlio Pedrosa Filho
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.^a Dra. Maria Laura Martins Costa
Universidade Federal Fluminense - UFF

Rio de Janeiro

2014

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meus pais, Rosimere Costa do Lago Sobral e Carlos Alberto Sobral, com quem sempre pude contar nos bons momentos e nas adversidades e ao meu tio Reynaldo José Costa lago, que considero como um pai, devido sua intensa participação em minha formação como homem.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pela minha vida, minha família e meus amigos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama pelos ensinamentos, orientação, dedicação e auxílio, sem contar com sua excelente amizade.

Ao coorientador, Prof. Dr. Eduardo Dias Corrêa, pelas fundamentais ajudas fornecidas e amizade constituída.

À minha mãe Rosimere Costa do Lago Sobral, que apesar das dificuldades enfrentadas, sempre incentivou meus estudos.

Ao meu tio, Reynaldo José Costa Lago, por ter feito de tudo para ver minha felicidade, sei que grande parte do meu sucesso depende dele.

Ao meu irmão Rodrigo do Lago Sobral pela presença e parceria em todas as fases de minha vida.

À minha namorada, Taiane Nascimento de Souza por todos esses anos de amor e companheirismo fundamentais para dedicação aos estudos.

À CAPES pelo financiamento do estudo.

“Nunca veremos invenções ou traduções para a prática, em novos produtos ou processos, sem haver um *pool* de pesquisadores fazendo ciência abstrata”.

Miguel Angelo Laporta Nicolelis

RESUMO

SOBRAL, Rodolfo do Lago. *Simulação do processo de transferência de calor não linear condução-radiação por meio de um esquema linear em diferenças finitas*. 91f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Neste trabalho o processo não linear de transmissão de calor condução-radiação é abordado num contexto bidimensional plano e simulado com o uso de um esquema linear em diferenças finitas. O problema original é tratado como o limite de uma sequência de problemas lineares, do tipo condução-convecção. Este limite, cuja existência é comprovada, é facilmente obtido a partir de procedimentos básicos, acessíveis a qualquer estudante de engenharia, permitindo assim o emprego de hipóteses mais realistas, já que não se tem o limitante matemático para a abordagem numérica de uma equação diferencial parcial elíptica. Neste trabalho foi resolvido o problema de condução de calor em regime permanente em uma placa com condições de contorno convectivas e radioativas utilizando-se o software MatLab, vale ressaltar, que a mesma metodologia é aplicável para geometrias mais complexas

Palavras-chave: Transferência de calor não linear. Métodos numéricos. Diferenças finitas.

ABSTRACT

SOBRAL, Rodolfo do Lago. *Simulation of the process of nonlinear heat transfer by conduction-radiation through a linear scheme in finite difference*. 91f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

In this work the nonlinear conduction-radiation heat transfer process is considered under a plane two dimensional assumption and simulated by means of a finite difference linear scheme. The original problem is regarded as the limit (which always exists) of a sequence of linear problems like the conduction-convection ones. Such a limit is reached in an easy way by means of standard procedures, available for any undergraduate engineering student, allowing the employment of more realistic hypotheses, since the mathematical complexities are not a constraint for simulating the elliptic partial differential equation. This work solved the problem of heat conduction in steady state conditions on a plate with convective and radioactive contour using MatLab software, it is noteworthy that the same methodology is applicable to more complex geometries.

Keywords: Non linear heat transfer. Numerical methods. Finite difference.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Influência na taxa de falhas	14
Figura 2.1 – Faixa típica de condutividade térmica de diferentes materiais.....	33
Figura 2.2 – Variação da condutividade térmica com a temperatura para elementos e ligas metálicas	34
Figura 2.3 – Hipótese de Stephan	39
Figura 4.1 – Algoritmo básico para resolução de problemas.....	46
Figura 4.2 – Malha discretizada	47
Figura 6.1 – Campo de temperatura da placa.....	60
Figura 6.2 – Isotermas.....	61
Figura 6.3 – Diferenças relativas da temperatura em função dos nós.....	62
Figura 6.4 – Campo de temperatura da placa.....	63
Figura 6.5 – Isotermas.....	64
Figura 6.6 – Diferenças relativas da temperatura em função dos nós.....	65
Figura 6.7 – Campo de temperatura da placa.....	66
Figura 6.8 – Isotermas.....	67
Figura 6.9 – Diferenças relativas da temperatura em função dos nós.....	68
Figura 6.10 – Iteração 300	71
Figura 6.11 – Iteração 400	71
Figura 6.12 – Iteração 500	71
Figura 6.13 – Iteração 1000	71
Figura 6.14 – Iteração 2000	71
Figura 6.15 – Iteração 3705 (última).....	71
Figura 6.16 – Iteração 300	72
Figura 6.17 – Iteração 400	72
Figura 6.18 – Iteração 500	72
Figura 6.19 – Iteração 1000	72
Figura 6.20 – Iteração 2000	72
Figura 6.21 – Iteração 7306 (última).....	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Diferenças relativas das temperaturas	61
Tabela 6.2 – Diferenças relativas das temperaturas	64
Tabela 6.3 – Diferenças relativas das temperaturas	67

LISTA DE SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
EDP	Equações Diferenciais Parciais
MDF	Método das Diferenças Finitas
MATLAB	Laboratório de Matrizes

LISTA DE SÍMBOLOS

a	absortância
b	reflectância
c	transmitância
C	calor específico
C_p	calor específico a pressão constante
C_v	calor específico a volume constante
\dot{q}	taxa de geração de calor por unidade de tempo e volume
g	aceleração da gravidade
h	coeficiente de filme
σ	constante de Stefan-Boltzmann
k	condutividade térmica
M	massa do corpo
T	temperatura absoluta
u	energia interna específica
U	energia interna
S	entropia
V	volume
p	pressão
Q	quantidade de calor específico
x	direção da coordenada
y	direção da coordenada
z	direção da coordenada
r	direção da coordenada
θ	direção da coordenada
\emptyset	direção da coordenada
t	tempo
Ω_t	região no espaço no instante t
$\partial\Omega_t$	fronteira de Ω_t
∇	gradiente

D	derivada material
Φ	função dissipação viscosa
R	região fixa no espaço
∂R	fronteira da região R
α	difusividade térmica
ϵ	emissividade
ρ	massa específica
τ	tensão cisalhante
μ	viscosidade
γ	fator de convergência
ζ	fator geométrico dependente da emissividade e da posição relativa
D	parte simétrica do gradiente de velocidades
F	vetor força de corpo
v	vetor velocidade
$q(\mathbf{r}, t)$	vetor fluxo de calor por unidade de tempo e área
n	vetor normal unitário exterior
\mathbf{r}	posição espacial
t	vetor tensão
T	tensor tensão de Cauchy

Subíndices

B	corpo negro
∞	ambiente
t	tempo
e	entrada
s	saída
VC	volume de controle
$mín$	correspondente ao menor nó
$máx$	correspondente ao maior nó

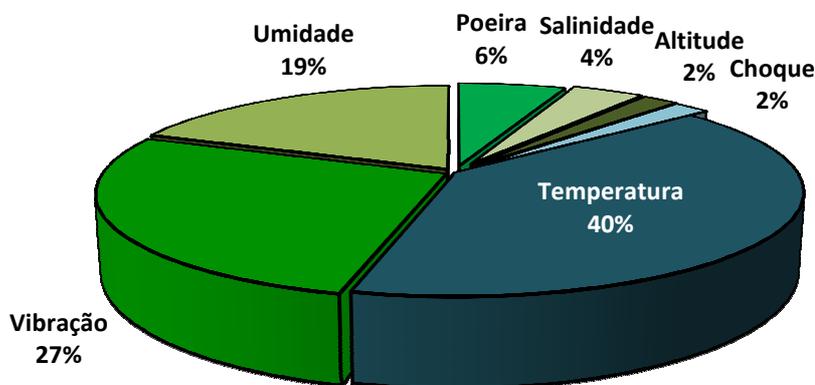
SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1. LEIS DA CONSERVAÇÃO	17
1.1. Equação da continuidade	17
1.2. Equação da quantidade de movimento linear	19
1.3. Equação da energia	21
1.4. Desigualdade de Clausius-Duhem	25
2. TRANSFERÊNCIA DE CALOR	26
2.1. Condução	27
2.1.1. <u>Condutividade térmica</u>	32
2.2. Convecção	34
2.2.1. <u>Interação convecção natural e radiação</u>	36
2.3. Radiação	37
3. MODELO MATEMÁTICO	42
3.1. Equações diferenciais parciais de segunda ordem	43
4. MÉTODO DE DISCRETIZAÇÃO	46
4.1. Diferenças finitas	47
5. MODELO NUMÉRICO	50
5.1. Erros numéricos	50
5.2. Equações discretizadas	51
5.2.1. <u>Interior</u>	51
5.2.2. <u>Condições de contorno</u>	52
5.3. Verificação e Validação	55
6. RESULTADOS DO MODELO	59
6.1. Exemplo 1	60
6.2. Exemplo 2	62
6.3. Exemplo 3	65
CONCLUSÃO	73
REFERÊNCIAS	74
ANEXOS	77

INTRODUÇÃO

A transferência de calor é um fenômeno de transporte encontrado em toda parte, visto que a natureza jamais se encontra em equilíbrio térmico. Em função do efeito da temperatura local sobre a resposta dos materiais, torna-se cada vez mais imperativo que se busque simular de forma precisa os processos de transmissão de calor que, na sua essência, são bastante complexos. A transferência de calor é um assunto muito estudado que tem despertado interesse crescente, devido à vasta aplicação nos ramos da engenharia, tais como nas áreas, industrial, eletrônica e química, processos em que a variável temperatura é a controlada, são usuais. Uma atenção indevida ao controle térmico pode acarretar redução da vida útil de componentes, aumento de custos de reposição e manutenção. Para equipamentos eletrônicos, por exemplo, a temperatura é responsável por quase metade dos defeitos apresentados, como mostra a Figura 1.1.

Figura 1.1 – Influência na taxa de falhas



Fonte: Adaptado de RAMOS, 1998.

Com o advento e evolução da computação que ocorre desde a década de sessenta e o aumento considerável das velocidades de processamentos e capacidade de armazenamento das máquinas, tem proporcionado o interesse no desenvolvimento de algoritmos para a solução dos mais diversos problemas de engenharia. Segundo Chapman (2004), o computador

foi provavelmente a invenção mais importante do século XX, afetando a vida humana de muitas maneiras.

Um engenheiro ou projetista conta com as seguintes ferramentas para analisar ou desenvolver um projeto: métodos analíticos, métodos numéricos e experimentação em laboratório, sendo que os dois primeiros formam a classe dos métodos teóricos, pois objetivam resolver equações que formam o modelo matemático (MALISKA, 2004).

As soluções analíticas devem ser empregadas a problemas cujas hipóteses não se desviem em demasia do fenômeno físico real, ressalta-se sua aplicação na validação de modelos numéricos. A simulação numérica além de viabilizar a resolução de problemas complexos apresenta resultados que reduzem tempo e custo de projetos (MALISKA, 2004).

Diversos fenômenos físicos têm sido ao longo da história objeto de estudos e pesquisas. Do ponto de vista matemático, os fenômenos físicos podem ser representados através de equações diferenciais, de acordo com Leithold (1994), “as equações diferenciais têm uma importância muito grande nas aplicações da matemática. A indagação sobre a evolução de um dado fenômeno susceptível de tratamento matemático está ligada, quase sempre, a uma equação diferencial. Muitos fenômenos que ocorrem na óptica, eletricidade, ondulatória, magnetismo, mecânica, fluídos, biologia,..., podem ser descritos através de equações diferenciais parciais”. Em Greenberg (1998), lê-se: “As formulações matemáticas de problemas em ciência e engenharia são geralmente representadas por equações envolvendo derivadas de uma ou mais funções desconhecidas. Tais equações são chamadas de equações diferenciais”. Existem dois tipos de equações diferenciais: as equações diferenciais ordinárias (EDO) e equações diferenciais parciais (EDP).

Entre os muitos processos físicos que podem ser representados por equações diferenciais está o estudo da condução de calor que, segundo Braga (2004), é definido como processo de troca de energia entre sistemas ou partes de um mesmo sistema, com gradiente de temperatura. Podendo ser analisado sem a dependência do tempo caracterizando-se assim o regime permanente, ou com a dependência do tempo definindo o regime transiente.

Além da questão temporal, a complexidade de um problema de condução de calor depende também da escolha da geometria e da natureza dos parâmetros envolvidos.

Braga (2004) e Arpaci (1966) descreveram que para simular os processos físicos envolvidos na área de transferência de calor deve-se recorrer ao estudo e refinamento das leis governantes, à modelagem matemática e ao desenvolvimento de técnicas computacionais para o tratamento analítico e numérico destes problemas.

Neste trabalho será feita uma abordagem da equação da difusão de calor em regime permanente, equação esta descrita por uma equação diferencial parcial elíptica.

1. LEIS DA CONSERVAÇÃO

As leis da conservação são a representação dos Axiomas básicos da Mecânica. Em particular, neste trabalho, daremos ênfase especial ao Axioma da Conservação da Energia (1ª Lei da Termodinâmica) o qual dará origem à equação diferencial parcial que governa o processo de transferência de calor em corpos rígidos. A seguir serão mostradas as equações de conservação em suas formas globais e locais.

1.1. Equação da continuidade

Axioma: a quantidade de matéria (massa) associada a uma dada parte de um corpo contínuo é invariante no tempo.

Em outras palavras, o axioma da conservação da massa pode ser representado como:

$$\frac{d}{dt} M_{CORPO} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dV = 0 \quad (1.1)$$

Onde Ω_t denota a região ocupada pelo corpo contínuo (ou por uma parte dele) em questão no instante de tempo t , chamada de configuração atual, e M_{CORPO} representa a quantidade de matéria contida em Ω_t .

O teorema do transporte estabelece que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dV = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV \quad (1.2)$$

Onde $\frac{D\rho}{Dt}$ representa a derivada material do campo de densidades. Assim, considerando o axioma da conservação da massa:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dV = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad (1.3)$$

Uma vez que a região Ω_t é arbitrária (pode ser qualquer parte do corpo), pode-se concluir que (forma local da equação da continuidade para um corpo contínuo).

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.4)$$

Existe uma maneira mais simples e intuitiva de se obter a equação da continuidade (equação que representa a conservação de massa). Para isso, considera-se uma região R fixa no espaço e leva-se em conta que: se não há geração (criação), então “o que entra menos o que sai é igual ao que é acumulado”. Em termos mais específicos, a taxa de variação da massa contida em R é igual à taxa de entrada de massa menos a taxa de saída de massa através da fronteira de R , denotada por ∂R .

Matematicamente, o princípio pode ser representado como:

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho dV = - \int_{\partial R} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.5)$$

Onde o termo à esquerda representa a “taxa de variação da massa contida em R ”, enquanto que o termo à direita representa a “taxa de entrada de massa menos a taxa de saída de massa através de ∂R ”. A equação acima é chamada de “equação da continuidade para um volume de controle fixo” e representa a forma global (integral) da equação da continuidade para uma região fixa no espaço. Essa equação é muito útil quando a região espacial R é pré-definida e não se tem dados suficientes para uma análise mais precisa. No entanto, há que ser ressaltado que, nesses casos, não é assegurada a conservação local da massa.

Para obter a equação da continuidade na forma local (já obtida anteriormente), reescreve-se a equação acima com o auxílio do teorema da divergência e com a comutação dos operadores no termo do lado esquerdo (já que a região de integração é invariante no tempo). Desta forma:

$$\int_R \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_R \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = \int_R \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0 \quad (1.6)$$

Uma vez que a equação acima deve ser verificada para qualquer região fixa R , é necessário que a expressão entre parênteses seja identicamente nula. Em outras palavras,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.7)$$

Que é a forma local da equação da continuidade. Essa equação também pode ser escrita, visto que, $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho$, como:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.8)$$

No sistema cartesiano retangular de coordenadas, a forma local da equação da continuidade é expressa por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (1.9)$$

É interessante notar que a equação da continuidade foi obtida sem que fossem empregados “paralelepípedos elementares” e, tampouco, qualquer sistema de coordenadas.

Voltando à equação da continuidade, escreve-se que,

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho dV = - \int_R \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV \quad (1.10)$$

Assim, para uma pequena vizinhança, $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ representa a taxa de “saída-entrada” de massa (nessa vizinhança). Em outras palavras, o divergente está associado à ideia de fluxo de/para uma região, através de sua fronteira.

1.2. Equação da quantidade de movimento linear

O primeiro axioma de Euler estabelece que a taxa de variação (no tempo, evidentemente) da quantidade de movimento linear de um corpo, relativamente a um referencial fixo, é igual à soma das forças externas agindo sobre esse corpo.

A quantidade de movimento linear (momentum) associada a um corpo que ocupa a região Ω_t , no instante t , é dada pela integral do produto $\rho\mathbf{v}$ sobre a região Ω_t . Assim sendo, o primeiro axioma de Euler pode ser expresso como:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho\mathbf{v}dV = \mathbf{F}_{SUPERFÍCIE} + \mathbf{F}_{CORPO} = \sum \mathbf{F}_{EXTERNAS} \quad (1.11)$$

Ou ainda,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho\mathbf{v}dV = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}dS + \int_{\Omega_t} \rho\mathbf{g}dV \quad (1.12)$$

Levando em consideração a relação entre o vetor tensão e o tensor tensão de Cauchy, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho\mathbf{v}dV = \sum \mathbf{F}_{EXTERNAS} = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T}ndS + \int_{\Omega_t} \rho\mathbf{g}dV \quad (1.13)$$

O teorema do transporte estabelece que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho\mathbf{v}dV = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D(\rho\mathbf{v})}{Dt} + (\rho\mathbf{v})\text{div}\mathbf{v} \right) dV \quad (1.14)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho\mathbf{v}dV = \int_{\Omega_t} \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{v} \frac{D\rho}{Dt} + \rho\mathbf{v}\text{div}\mathbf{v} \right) dV \quad (1.15)$$

Levando em conta a equação da continuidade na sua forma local,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho\mathbf{v}dV = \int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV \quad (1.16)$$

Assim, a equação da quantidade de movimento linear pode ser expressa como:

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T} \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV \quad (1.17)$$

Empregando o teorema da divergência, reescreve-se a equação acima como:

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \int_{\Omega_t} \text{div} \mathbf{T} dV + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV \quad (1.18)$$

Uma vez que a região Ω_t (configuração atual do corpo) é arbitrária, pode-se concluir que (forma local da equação da quantidade de movimento linear para um corpo contínuo):

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad \text{ou ainda} \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\text{grad} \mathbf{v}] \mathbf{v} \right) = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (1.19)$$

Salientando-se que a derivada material de \mathbf{v} é a aceleração.

Portanto no sistema cartesiano retangular de coordenadas, a forma local da equação da quantidade de movimento linear é dada por:

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho g_x \quad (1.20a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho g_y \quad (1.20b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z \quad (1.20c)$$

1.3. Equação da energia

A equação da energia para um corpo contínuo, também conhecida por primeira lei da termodinâmica, consiste num axioma que estabelece que: a taxa de variação da quantidade de energia de um corpo (cinética + interna) é igual à taxa de realização de trabalho mecânico sobre este corpo (potência mecânica das forças atuando sobre o corpo) mais a taxa de energia

transmitida na forma de calor (calor transmitido por unidade de tempo pela fronteira + geração interna de calor).

O princípio acima é representado matematicamente por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left[u + \frac{1}{2} \mathbf{v}\mathbf{v} \right] dV = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T}\mathbf{n})\mathbf{v}dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g}\mathbf{v}dV + \int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q}\mathbf{n}dS + \int_{\Omega_t} \dot{q}dV \quad (1.21)$$

Onde:

$\int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T}\mathbf{n})\mathbf{v}dS \rightarrow$ Potência mecânica das forças de superfície (contato);

$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g}\mathbf{v}dV \rightarrow$ Potência mecânica das forças de corpo;

$\int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q}\mathbf{n}dS \rightarrow$ Fluxo de calor cruzando (entrando) a fronteira do corpo;

$\int_{\Omega_t} \dot{q}dV \rightarrow$ Taxa de geração interna de calor (energia).

A quantidade \mathbf{q} representa o vetor fluxo de calor (por unidade de tempo e área), enquanto que a quantidade \dot{q} representa a taxa de geração de calor (por unidade de tempo e volume). Por exemplo, quando uma corrente elétrica flui através de um condutor, \dot{q} é positivo e, na média, igual ao produto da diferença de potencial pela corrente dividido pelo respectivo volume de material condutor.

O sinal negativo na penúltima integral da equação acima aparece para que essa integral represente o fluxo que entra e não o que sai.

Reescrevendo a equação da energia, com o auxílio do teorema do transporte:

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \frac{D}{Dt} \left[\rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v}\mathbf{v} \right) \right] + \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v}\mathbf{v} \right) \text{div}\mathbf{v} \right\} dV = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T}\mathbf{n})\mathbf{v}dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g}\mathbf{v}dV + \int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q}\mathbf{n}dS + \int_{\Omega_t} \dot{q}dV \quad (1.22)$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left[\rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v}\mathbf{v} \right) \right] + \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v}\mathbf{v} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \\ = \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \left[\left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v}\mathbf{v} \right) \right] + \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v}\mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

E que (equação da continuidade):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.24)$$

Tem-se:

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v}\mathbf{v} \right) \right\} dV = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T}\mathbf{n})\mathbf{v} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g}\mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q}\mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \quad (1.25)$$

A simetria do tensor tensão e do teorema da divergência permite escrever que:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T}\mathbf{n})\mathbf{v} dS - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q}\mathbf{n} dS &= \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T}\mathbf{v})\mathbf{n} dS \\ - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q}\mathbf{n} dS &= \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) dV - \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{q} dV \end{aligned} \quad (1.26)$$

Assim, a equação da energia fica:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v}\mathbf{v} \right) \right\} dV = \\ \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) dV + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g}\mathbf{v} dV - \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{q} dV + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \end{aligned} \quad (1.27)$$

Como a região Ω_t (configuração atual do corpo) é arbitrária, conclui-se (forma local da equação da energia para um corpo contínuo):

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v}\mathbf{v} \right) = \operatorname{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) + \rho \mathbf{g}\mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \dot{q} \quad (1.28)$$

Uma vez que

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\mathbf{T})\mathbf{v} + \mathbf{T}\operatorname{grad}\mathbf{v} \quad (1.29)$$

e

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}\mathbf{v} \right) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \mathbf{v} \quad (1.30)$$

Pode-se escrever que:

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \mathbf{v} = (\operatorname{div}\mathbf{T})\mathbf{v} + \mathbf{T}\operatorname{grad}\mathbf{v} + \rho\mathbf{g}\mathbf{v} - \operatorname{div}\mathbf{q} + \dot{q} \quad (1.31)$$

Levando-se em conta que (equação da quantidade de movimento linear):

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{g} \quad (1.32)$$

A forma local da equação da energia se reduz a:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \mathbf{T}\operatorname{grad}\mathbf{v} - \operatorname{div}\mathbf{q} + \dot{q} \quad (1.33)$$

A simetria do tensor tensão e a definição de derivada material permite reescrever a equação local da energia como:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{grad}u\mathbf{v} \right) = -\operatorname{div}\mathbf{q} + \mathbf{T}\mathbf{D} + \dot{q} \quad (1.34)$$

Onde \mathbf{D} é a parte simétrica do gradiente de velocidades.

1.4. Desigualdade de Clausius-Duhem

A segunda lei da termodinâmica estabelece que a taxa de geração de entropia num corpo é sempre maior, ou igual, ao fluxo de entropia para esse corpo. Essa desigualdade é representada matematicamente por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho s dV \geq - \int_{\partial\Omega_t} \frac{1}{T} \mathbf{q} \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \frac{\dot{q}}{T} dV \quad (1.35)$$

(onde s é a entropia específica e T é a temperatura absoluta). Sua forma local é obtida a partir do teorema do transporte, combinado com a equação da continuidade e com o teorema da divergência, sendo dada por (desigualdade de Clausius-Duhem):

$$\rho \frac{Ds}{Dt} \geq -\text{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\dot{q}}{T} \quad (1.36)$$

Para um volume de controle fixo R , a segunda lei da termodinâmica para pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho s dV + \int_{\partial R} \rho s (\mathbf{v} \mathbf{n}) dS \geq - \int_{\partial R} \frac{1}{T} \mathbf{q} \mathbf{n} dS + \int_R \frac{\dot{q}}{T} dV \quad (1.37)$$

Maiores detalhes quanto à obtenção das equações encontram-se na referência Slattery (1981).

2. TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Energia pode atravessar a fronteira de um corpo de duas formas distintas: calor e trabalho. Sempre que houver um gradiente de temperatura em um determinado sistema ou sempre que houver uma diferença de temperatura entre sistemas, haverá transferência de energia através de suas fronteiras. Esse processo de transporte de energia devido a um gradiente de temperatura é chamado de transferência de calor (KREITH, 2011)

Fluxo de calor não pode ser medido diretamente, mas tal conceito tem significado físico porque é relacionado através de uma quantidade escalar mensurável denominada temperatura (ÖZISIK, 1993).

O calor é uma forma de energia, a temperatura é uma medida utilizada para determinar a quantidade de calor em um determinado corpo, ou seja, o grau de agitação das moléculas desse corpo. A transmissão de calor se dá de um corpo com maior quantidade de energia (calor), para um corpo com menor quantidade de energia. Quanto mais energia um corpo recebe, mais suas moléculas se agitam, ou seja, mais sua temperatura aumenta. Tal processo valida criteriosamente a lei zero da termodinâmica, lei esta, facilmente constatada empiricamente através da criação de um pequeno sistema termodinâmico constituído de materiais não necessariamente distintos, a diferentes temperaturas, constatando-se que após certo tempo tal sistema tende a um em equilíbrio térmico.

A literatura de transmissão do calor geralmente denota três modos distintos de transmissão do calor: condução, radiação e convecção. Rigorosamente falando, somente a condução e a radiação deveriam ser classificadas como processos de transferência de calor, porque somente esses dois mecanismos dependem somente da existência de um gradiente de temperatura. A última dos três, a convecção, não obedece a rigor a definição de transferência de calor, porque sua operação também depende do transporte mecânico de massa. Contudo, desde que a convecção também realize transferência de energia através das regiões de maior para as de menor temperatura, o termo "transferência de calor por convecção" pode ser aceito (KREITH, 2011).

Portanto, distingue-se entre difusão de calor em corpos rígidos estacionários, que é chamada de condução e a difusão de calor em movimento de corpos deformáveis, chamada de convecção (ARPACI, 1966).

Levando-se em conta tal particularidade do fenômeno de convecção, verifica-se que o processo de transferência de calor clássico é regido apenas por duas leis particulares, relacionadas cada qual com um modo específico de transmissão do calor, como mostrado:

Na difusão, o calor é transferido através de um meio para o outro através de seus contatos, e se existir distribuição não uniforme de temperatura em um meio ou entre dois meios. Em nível molecular, o mecanismo de difusão é visualizado como a troca de energia cinética entre moléculas em regiões de altas e baixas temperaturas. Particularmente, está relacionado com o impacto elástico das moléculas nos gases, ou com o movimento de elétrons livres dos metais e/ou com as oscilações atômicas em sólido eletricamente carregado (ARPACI, 1966).

Já a verdadeira natureza da radiação e seus mecanismos de transporte ainda não foram completamente entendidos até os dias de hoje. Muitos de seus efeitos podem ser descritos em termos de ondas eletromagnéticas, e outros em termos da mecânica quântica, embora nenhuma teoria explique todas as observações experimentais. De acordo com a teoria da onda, por exemplo durante a emissão da radiação, um corpo converte continuamente parte de sua energia interna em ondas eletromagnéticas, ou seja, em outra forma de energia. Tais ondas percorrem através do espaço com baixa velocidade até colidir com outro corpo, onde parte de sua energia é absorvida e convertida novamente em energia interna (ARPACI, 1966).

2.1. Condução

A condução é o modo de transferência de calor em que a troca de energia decorre de corpos sólidos ou fluidos em repouso (ÖZISIK, 1993).

De acordo com Carron e Guimarães (2003), “quando as partículas de um sólido vibram, elas transmitem energia para as partículas vizinhas”. Quando algumas moléculas de um corpo começam a se agitar, adquirem certa velocidade em seu deslocamento; devido a esse deslocamento, colidem com moléculas vizinhas e transferem parte de sua energia cinética para as que estão paradas. Estas, por sua vez, começam a se deslocar, e repetem o processo descrito. Essa transferência de energia entre as moléculas é chamada de fluxo de calor por condução.

A lei básica que fornece uma relação entre fluxo de calor e gradiente de temperatura, baseada em observações experimentais realizadas pelo físico e matemático francês Joseph

Fourier, supondo um sólido isotrópico e homogêneo, é demonstrada pela equação (2.1). Desde que o vetor fluxo de calor $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ aponte na direção do decréscimo de temperatura o sinal negativo é inserido na equação (2.1) para tornar o fluxo de calor uma grandeza positiva (ÖZISIK, 1993):

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{k}\nabla T(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

Onde $\mathbf{k} = \widehat{\mathbf{k}}(T)$, sendo \mathbf{k} o tensor condutividade térmica, simétrico e positivo definido. No caso de materiais isotrópicos, caso estudado neste trabalho, $\mathbf{k} = k\mathbf{1}$, e k é um escalar positivo.

Em coordenadas retangulares a equação (2.1) é denotada por:

$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = -i\mathbf{k} \frac{\partial T}{\partial x} - j\mathbf{k} \frac{\partial T}{\partial y} - k\mathbf{k} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.2)$$

Onde \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} são vetores unitários direcionais ao longo das respectivas direções x, y e z . Assim, as três componentes do vetor fluxo de calor nas direções x, y e z são:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.3)$$

Depois de abordada a lei de Fourier e tendo como base as equações da continuidade, conservação de energia e quantidade de movimento, previamente demonstradas neste trabalho, tem-se para um volume de controle V :

$$\left[\text{Taxa de calor atravessando o contorno da superfície } V \right] + \left[\text{Taxa de geração de energia em } V \right] = \left[\text{Taxa de acúmulo de energia em } V \right] \quad (2.4)$$

A taxa de calor atravessando o contorno em V é representada pela equação (2.5), onde A é a área superficial do elemento de volume V , \mathbf{n} é o vetor unitário normal apontando para o exterior do elemento de área dA , utilizando o teorema da divergência de Green para converter a integral de superfície em integral de volume, obtém-se:

$$\left[\text{Taxa de calor atravessando} \right]_{\text{o contorno da superfície } V} = - \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dv \quad (2.5)$$

Os outros dois termos contidos na equação do balanço da energia são representados por:

$$\text{Taxa de geração de energia em } V = \int_V \dot{q}(\mathbf{r}, t) dv \quad (2.6)$$

$$\text{Taxa de acúmulo de energia em } V = \int_V \rho C \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dv \quad (2.7)$$

Substituindo as equações (2.5), (2.6) e (2.7) na equação (2.4), temos a equação do balanço de energia definida como:

$$\int_V \left[-\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + \dot{q}(\mathbf{r}, t) - \rho C \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] dv = 0 \quad (2.8)$$

Derivando a equação (2.8) para um pequeno elemento de volume V dentro do sólido, ressalta-se que o elemento de volume V deve ser escolhido o menor possível para que se remova a integral, portanto obtemos a equação diferencial que descreve a condução de calor em um sólido isotrópico, homogêneo com geração interna de calor $\dot{q}(\mathbf{r}, t)$ (ARPACI, 1966):

$$\nabla[\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)] + \dot{q}(\mathbf{r}, t) = \rho C \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.9)$$

Onde ρ é a densidade e C o calor específico, salientando-se que para materiais sólidos a aproximação $C = C_p = C_v$ pode ser adotada.

Substituindo $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ da equação (2.1) na equação (2.9), obtém a equação diferencial da condução de calor para um sólido isotrópico, homogêneo e estacionário com geração interna de calor, tal qual:

$$\nabla \cdot [k \nabla T(\mathbf{r}, t)] + \dot{q}(\mathbf{r}, t) = \rho C \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.10)$$

Assumindo que o termo k , condutividade térmica seja constante, ou seja, independente da posição e da temperatura, a equação (2.10) pode ser escrita como:

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{k} \dot{q}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.11)$$

O termo α , difusividade térmica, é a propriedade do meio de significado físico associado à velocidade da propagação de calor dentro do sólido durante a troca térmica variando no tempo. Uma maior difusividade térmica representa maior propagação de calor no meio, a dimensão desta grandeza é representada pelo *comprimento²/tempo* (ÖZISIK, 1993).

$$\alpha = \frac{k}{\rho C} = \text{difusividade térmica} \quad (2.12)$$

Para representação final da equação diferencial da condução de calor, tem que se definir a princípio o sistema de coordenadas, convenientemente com o problema a ser resolvido.

Portanto, substituindo a coordenada (\mathbf{r}, t) por (x, y, z, t) e utilizando o operador laplaciano, temos a equação diferencial da condução de calor no sistema de coordenadas retangulares, representada pela equação (2.14) (HOLMAN, 2010):

Operador diferencial laplaciano,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi \quad (2.13)$$

Substituindo as coordenadas gerais da equação (2.10) pelas coordenadas retangulares, obtém:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.14a)$$

Para k constante,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k} \dot{q} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.14b)$$

Utilizando-se o operador laplaciano:

$$\nabla^2 T + \frac{1}{k} \dot{q} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.14c)$$

Para representação da equação diferencial da condução de calor no sistema de coordenadas cilíndrico e esférico, as variáveis independentes são (r, ϕ, z) e (r, θ, ϕ) respectivamente, como mostrado nas equações (2.15) e (2.16):

- Coordenadas cilíndricas (ÖZISIK, 1993):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.15a)$$

Para k constante,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k} \dot{q} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.15b)$$

- Coordenadas esféricas (ÖZISIK, 1993):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.16a)$$

Para k constante,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right) + \frac{1}{k} \dot{q} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.16b)$$

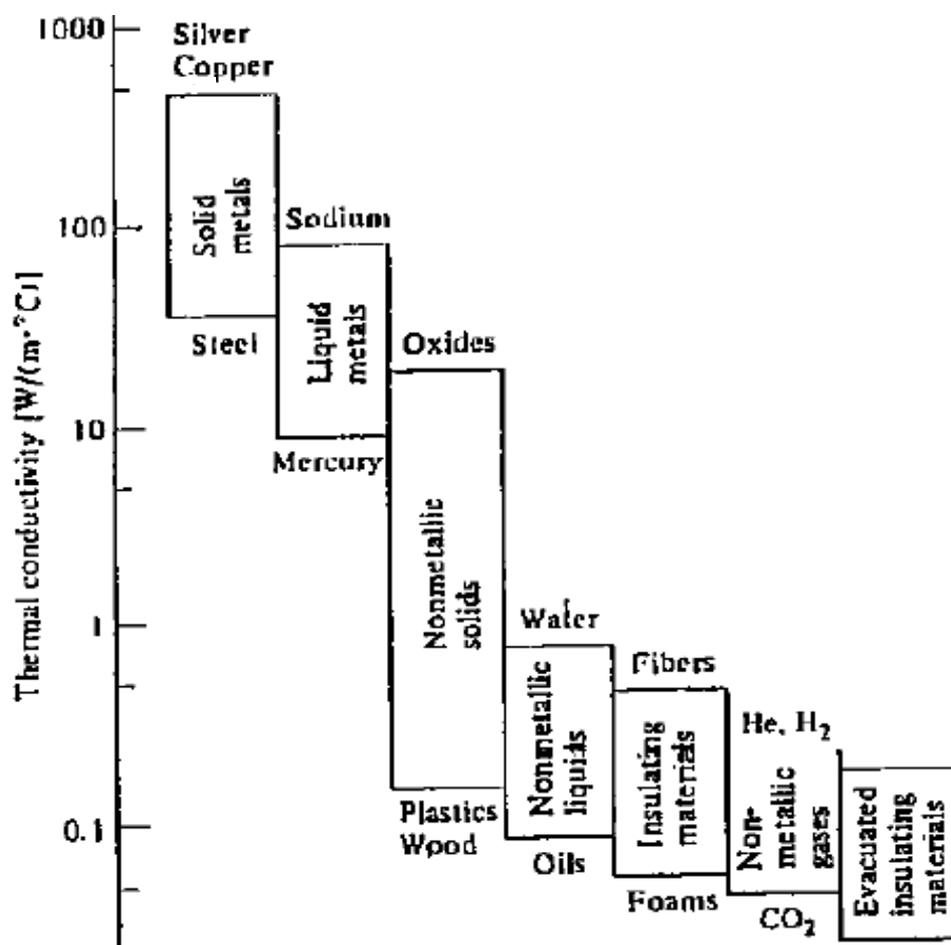
2.1.1. Condutividade térmica

Propriedade física relacionada com a habilidade que um corpo tem de conduzir calor. Quanto maior o valor dessa propriedade, maior é a capacidade que um corpo tem de conduzir ou absorver calor. Pode ser definida como a energia transferida sob a forma de calor por unidade de tempo, através de uma superfície.

Experimentalmente o fluxo de calor é diretamente proporcional à condutividade térmica k do material. Portanto, na análise da condução de calor, a condutividade térmica do material é uma importante grandeza que controla a razão de fluxo de calor no meio. Existe uma ampla diferença de condutividades térmicas de acordo com os diferentes materiais na engenharia. Maiores valores são conhecidos para metais puros e menores valores para gases e vapores, já materiais amorfos e líquidos inorgânicos tem condutividade térmica com valores intermediários. A figura 2.1 ilustra as faixas de condutividade térmica de diversos materiais, uma característica importante da condutividade térmica é que para metais puros a mesma varia de maneira inversamente proporcional, já para gases varia de maneira diretamente proporcional (ÖZISIK, 1993).

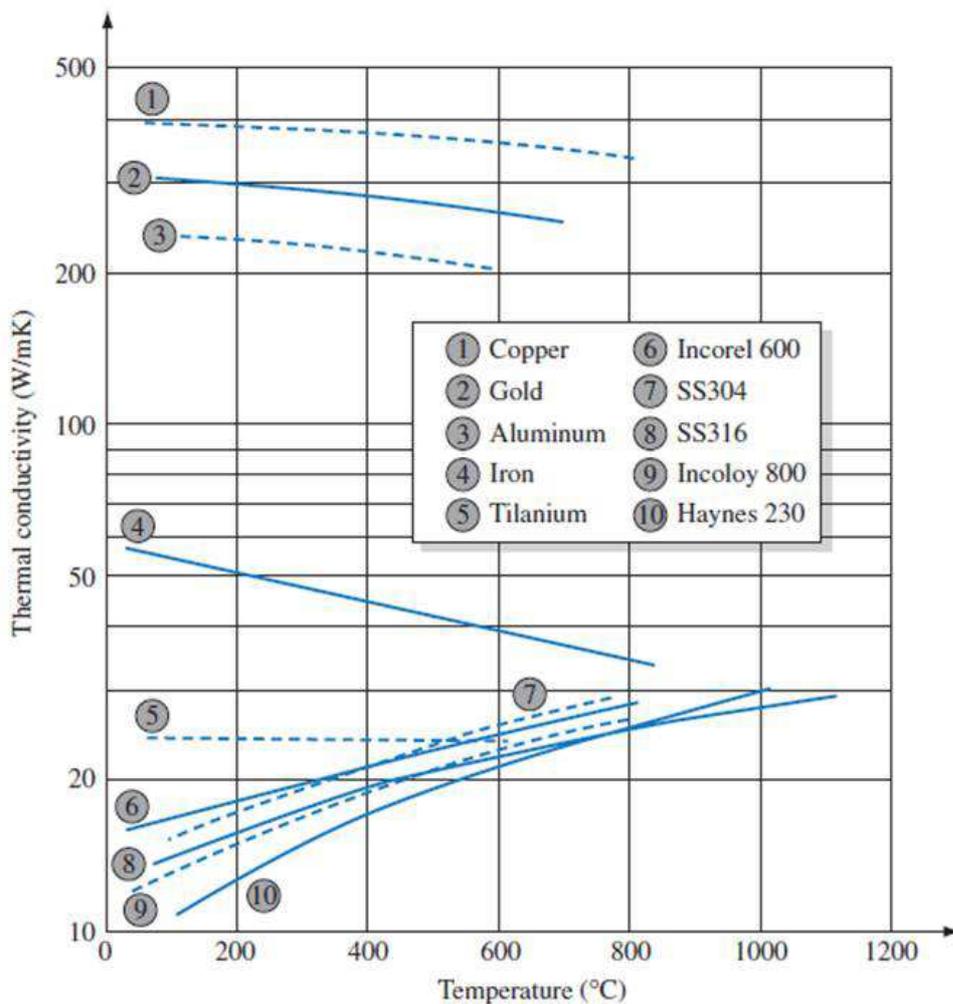
A figura 2.2 ilustrará a relação de alguns metais e ligas metálicas com suas respectivas temperaturas de operação. Os métodos experimentais utilizados para determinação das condutividades térmicas são muitos e variados, Arpaci (1966) denota extensivamente tais metodologias.

Figura 2.1 – Faixa típica de condutividade térmica de diferentes materiais



Fonte: ÖZISIK, 1993.

Figura 2.2 – Variação da condutividade térmica com a temperatura para elementos e ligas metálicas



Fonte: KREITH, 2011.

2.2. Convecção

Transferência de calor por convecção, ou simplesmente, convecção, é o estudo do processo de transporte de calor realizado por fluxo de fluidos. A palavra convecção tem origem no latim do verbo *convect-are*, que significa trazer junto ou carregar para algum lugar. Convecção de calor tem crescido no estudo da ciência devido à necessidade do entendimento e previsão do comportamento do fluido ao atuar como “carregador” de energia e matéria (BEJAN, 2013).

De acordo com o que provoca o transporte mecânico de massa, a convecção é classificada em natural ou forçada.

A convecção natural é um processo de transporte de energia térmica resultante do movimento do fluido induzido pelo empuxo. Em canais verticais, o empuxo atua exclusivamente no sentido de induzir o movimento ascendente do fluido no interior do canal, a partir da entrada desenvolvem-se camadas limites sobre cada superfície. Em canais, cujas placas estão bastante afastadas, camadas limites independentes desenvolvem-se sobre cada superfície e as características do escoamento aproximam-se daquelas de uma placa num meio infinito. Quando as placas estão bastante próximas, as camadas limites em desenvolvimento sobre cada superfície encontram-se, podendo dar origem a um escoamento completamente desenvolvido para casos onde o canal é suficientemente longo. Caso o canal seja inclinado, além de uma componente da força e empuxo paralela ao escoamento, aparecerá também uma componente perpendicular, e as características do escoamento podem ser fortemente influenciadas pelo aparecimento de efeitos tridimensionais (INCROPERA, 1988).

A principal diferença entre convecção natural e forçada é que nesta a velocidade média superficial é imposta por uma força externa e se comporta conforme ação de tal força, já na convecção natural o comportamento do fluido depende da distância superficial, ou seja, variação da viscosidade e densidade local (KREITH, 2011).

Neste trabalho a convecção será considerada apenas para fins de condição de contorno dos problemas abordados. A Lei de Newton do Resfriamento representa o fluxo de calor transferido por convecção natural pela equação

$$q = h(T - T_{\infty}) \quad (2.17)$$

Historicamente a equação (2.17) foi escrita por Fourier, quem introduziu o conceito de coeficiente de transferência de calor representado por h , ele enfatizou a diferença fundamental entre h e k . Porém, Newton havia publicado, a cerca de 100 anos antes, um ensaio demonstrando que medidas da razão de temperatura decresce (dT/dt) em um corpo imerso num fluido de maneira proporcional a diferença de temperatura ($T - T_{\infty}$), ou seja, Newton observou que poderia escrever $dT/dt = b(T - T_{\infty})$, em que o coeficiente b (assumido constante) era descrito pela razão h/c , que é, o coeficiente de transferência de calor dividido pelo calor específico do corpo imerso.

Os conceitos do coeficiente de transferência de calor e calor específico eram desconhecidos nos tempos de Newton sendo enunciados apenas por Fourier. Experimentos com líquidos foram realizados por Count Rumford, porém o nome convecção só foi dado só nos tempos de Prout. Afinal, a descoberta e o estudo da convecção se deu no mesmo tempo da condução e o criador de ambos foi Fourier, quem também escreveu a primeira equação da energia para fluxos convectivos (BEJAN, 2013).

2.2.1. Interação convecção natural e radiação

Um dos primeiros estudos nesta área foi realizado por Carpenter et al. (1976), onde foram considerados os mecanismos combinados de transferência de calor por convecção natural e radiação num canal vertical assimetricamente aquecido formado por paredes uniformemente aquecidas. Foram investigadas situações de aquecimento simétrico e assimétrico. As perdas tornavam-se mais importantes com o aumento do espaçamento entre as placas, fazendo com que temperaturas máximas não mais fossem verificadas na saída, e sim no centro da parede. Verificou-se também que a temperatura máxima na parede pode ser reduzida em até 40% devido à transferência de calor por radiação de uma superfície para a superfície oposta.

Sparrow et al. (1980) investigaram numericamente a interação entre convecção natural e radiação em um canal vertical formado por uma parede isotérmica e outra isolada. Foram obtidas soluções numéricas para a transferência de calor no canal considerando e não considerando a presença da radiação. Eles verificaram que a radiação tende a aumentar a temperatura da parede adiabática, transformando-a numa superfície termicamente ativa e aumentando em até 70% as taxas de transferência de calor.

Dehghan & Behnia (1996) investigaram numericamente os mecanismos combinados de transferência de calor por convecção natural, condução e radiação em uma cavidade bidimensional retangular com paredes adiabáticas, aberta no topo e aquecida por uma fonte de calor discreta localizada no centro de uma das paredes laterais.

Eles notaram que a inclusão da radiação afetou significativamente o perfil do escoamento e o campo de temperaturas, principalmente para valores elevados de emissividade da superfície da parede. Verificou-se também que aumento da transferência de calor por radiação foi compensado pelo enfraquecimento do mecanismo de convecção, resultando num

aumento desprezível da temperatura máxima da fonte térmica e do coeficiente de transferência de calor total, ao contrario de efeito verificado na configuração analisada por Sparrow et al. (1980). Entretanto, conclui-se que uma determinação precisa dos campos de velocidade e temperatura é fortemente dependente da inclusão da radiação no modelo numérico.

2.3. Radiação

Antes de começar a descrição da radiação, faz-se necessário uma breve revisão acerca de alguns conceitos apropriados. Do ponto de vista da eletromagnética, transferência de calor por radiação, tal como ondas de radio, raios cósmicos, etc., são energias em forma de onda eletromagnética diferenciando-se somente no comprimento da onda proveniente de cada radiação. Quando energia radiante colide com a superfície, uma fração desta é absorvida a e outra fração b , é refletida e o restante c é transmitido (ARPACI, 1980).

Assim,

$$a + b + c = 1 \quad (2.18)$$

Onde a, b, c são respectivamente, absorptância, reflectância e a transmitância da superfície. A equação (2.18) se reduz a

$$a + b = 1 \quad (2.19)$$

Para corpos contínuos opacos, cuja $c = 0$, ou seja, a transmitância é nula. Já para corpos transparentes $b = 0$, a equação (2.18) é expressa por:

$$a + c = 1 \quad (2.20)$$

A superfície que absorve toda a radiação incidente sobre si ($a=1$) a uma temperatura específica emitindo o máximo possível de radiação é chamado de corpo negro (ARPACI, 1980).

A emissividade da superfície é definida como

$$\epsilon = \frac{q}{q_B} \quad (2.21)$$

Onde q e q_B são os fluxos de calor radiantes superficiais através da superfície de um corpo qualquer e através da superfície do corpo negro, respectivamente, a mesma temperatura, assim a $\epsilon = 1$ para uma superfície negra (ARPACI, 1980).

A equação apresentada a seguir foi definida experimentalmente supondo condições permanentes e na presença de um contínuo não absorvedor, ou da presença de vácuo, tal equação é denominada Lei da radiação de Stefan-Boltzmann (ARPACI, 1980):

$$q_{12} = \sigma \bar{\zeta}_{12} (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.22)$$

Onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann e $\bar{\zeta}_{12}$ é um fator dependente tanto da emissividade quanto da posição relativa das superfícies, definido por:

$$\frac{1}{\bar{\zeta}_{12}} = \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1 \right) + \frac{1}{\bar{F}_{12}} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right) \quad (2.23)$$

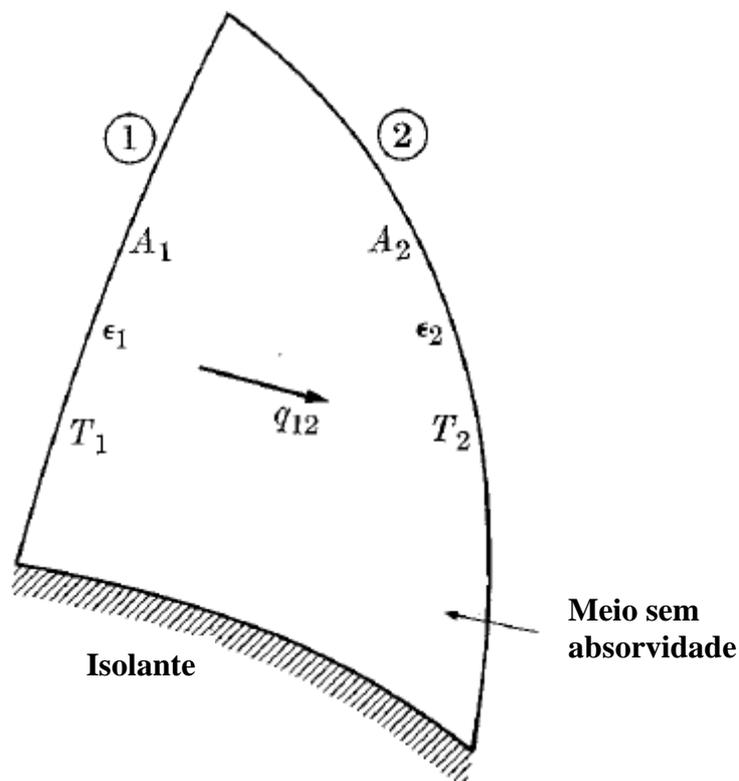
Onde F_{12} é o fator de vista geométrico,

$$\bar{F}_{12} = \frac{A_2 - A_1 F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2A_1 F_{12}} \quad (2.24)$$

Fisicamente F_{12} representa a fração da radiação total na superfície A_1 que intercepta a superfície A_2 . Esse fator torna-se unitário para uma superfície que entre em contato com outra superfície ou para placas paralelas onde as perdas de radiação são negligenciadas em todo o comprimento.

Como a superfície isolada aproxima-se de zero, $\bar{F}_{12} \rightarrow F_{12}$, a configuração abaixo, figura 2.3, denota o experimento realizado por Stefan e posteriormente comprovado termodinamicamente por Boltzmann.

Figura 2.3– Hipótese de Stephan



Fonte: ARPACI, 1980.

A transferência de calor por radiação não envolve deslocamento de massa ou partículas. A energia térmica pode ser utilizada para gerar luz e, sendo luz, se propaga através de ondas eletromagnéticas, que carregam energia e são capazes de se mover de um local para outro sem necessidade de um meio material para isso. Um exemplo disso, é como o sol transmite calor para a Terra, as ondas de radiação se propagam no vácuo. Pois, de acordo com Carron e Guimarães (2003), “pessoas próximas a uma fogueira são “atingidas” por uma quantidade de energia, transmitida por meio de ondas eletromagnéticas”.

Diferentemente da condução, onde a quantidade de calor depende da temperatura do meio em que se propaga, a radiação de calor, no entanto, é, em si, totalmente independente da temperatura do meio que se propaga. Geralmente, a radiação é um fenômeno muito mais complicado do que a condução. A razão para isto, é que o estado da radiação num dado instante e num determinado ponto do meio não pode ser representado, tal como o do fluxo de calor por condução, por um simples vetor (quantidade única orientada). Todos os raios de calor que, a um dado instante passam pelo mesmo ponto do meio são perfeitamente independente uns dos outros, e, a fim de especificar completamente o estado da radiação, a

intensidade da radiação deve ser conhecida em todas direções que passam pelo ponto em questão (PLANCK, 1914).

Planck demonstra a equação de Stephan-Boltzmann, utilizando um sistema termodinamicamente fechado, como mostrado:

Denotando-se a energia por U, tem-se:

$$U = V \cdot u \quad (2.25)$$

u - densidade volumétrica de radiação, depende apenas da temperatura T do corpo negro.

De acordo com a 1ª lei da termodinâmica,

$$dU + pdV - Q = 0 \quad (2.26)$$

De acordo com a 2ª lei da termodinâmica, considerando o processo reversível, ou seja, sem geração de entropia:

$$dS - \frac{Q}{T} = 0 \quad (2.27)$$

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} \quad (2.28)$$

Toma-se a temperatura T e o volume V como variáveis,

$$dS = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4u}{3T} dV \quad (2.29)$$

Daí, obtemos

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} \quad (2.30)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{4u}{3T} \quad (2.31)$$

Derivando-se parcialmente estas equações, a primeira com respeito a V e a segunda com respeito a T ,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{1}{T} \frac{du}{dT} = \frac{4}{3T} \frac{du}{dT} - \frac{4u}{3T^2} \quad (2.32)$$

Ou

$$\frac{du}{dT} = \frac{4u}{T} \quad (2.33)$$

Integrando a equação (2.33), obtém-se a Lei de Stefan-Boltzmann:

$$u = \sigma T^2 \quad (2.34)$$

E para energia radiante total:

$$U = \sigma T^4 \cdot V \quad (2.35)$$

Esta lei, que afirma que a densidade de volume e a intensidade específica de radiação do corpo negro são proporcionais à quarta potência da temperatura absoluta, foi estabelecida pela primeira vez por J. Stefan em uma base de medições bastante complicada, porém mais tarde, foi deduzida por Boltzmann.

A lei de Stefan-Boltzmann da radiação pode ser utilizada para uma definição absoluta de temperatura independente de todas as substâncias.

3. MODELO MATEMÁTICO

Uma equação diferencial é uma equação que contém uma função desconhecida e algumas de suas derivadas. Através das equações diferenciais podemos determinar o comportamento futuro de problemas físicos importantes, com base na variação dos valores presentes.

As equações diferenciais são classificadas quanto:

- tipo;
- ordem;
- linearidade.

Quanto ao tipo, as equações diferenciais são divididas em: equações diferenciais ordinárias (EDO) e equações diferenciais parciais (EDP). A equação diferencial ordinária depende apenas de uma variável independente, e envolve apenas derivadas simples, como mostrado na equação (3.1):

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (3.1)$$

Já as equações diferenciais parciais, envolvem mais de uma variável independente. Neste caso, as equações envolvem as derivadas parciais de uma função de duas ou mais variáveis.

Quanto a ordem, uma equação diferencial pode ser de 1º, de 2º, ..., de n-ésima ordem, dependendo da derivada de maior ordem presente na equação.

Quanto à linearidade, uma equação diferencial pode ser linear ou não linear. Uma equação diferencial é linear se ela for linear na função desconhecida e em todas suas derivadas, com coeficientes dependendo apenas das variáveis independentes (CHAPRA & CANALE, 2008).

3.1. Equações diferenciais parciais de segunda ordem

As equações diferenciais parciais são de grande importância na engenharia, pois são amplamente aplicadas na resolução de problemas como, por exemplo, na distribuição de temperatura em uma placa aquecida ou na determinação da infiltração de água sob uma barragem, ou na determinação do campo elétrico na ponta de um condutor. De forma geral, as equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem têm a seguinte representação:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y) \quad (3.2)$$

Onde A, B, C, D, E, F e G são funções de x e y. Quando os coeficientes de A ... G são constantes tem-se uma equação diferencial parcial de segunda ordem de coeficientes constantes.

As equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes são classificadas em três grupos: equações elípticas, equações parabólicas e equações hiperbólicas. Essa classificação é baseada no método das características, e é útil, pois relaciona problemas de engenharia e suas técnicas de solução (CHAPRA & CANALE, 2008).

Segundo Franco (2007) as equações parabólicas são adequadas para modelar problemas de difusão, enquanto que as equações elípticas são adequadas para problemas de equilíbrio, já as equações hiperbólicas para problemas de convecção.

Dependendo dos valores dos coeficientes dos termos de segunda ordem (A,B,C) classificamos as equações parciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes da seguinte forma.

Se $\Delta = B^2 - 4AC$, for igual a zero, então a equação é parabólica. Por exemplo, a equação de condução de calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

Se $\Delta = B^2 - 4AC$, for maior que zero então a equação é hiperbólica. Por exemplo, a equação da onda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

E se $\Delta = B^2 - 4AC$, for menor que zero a equação é elíptica. Por exemplo, a equação de Laplace,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.5)$$

Situações onde haja não linearidade em processos de transmissão de calor por condução são comuns, o termo condutividade dependente de T ou termo geração interna de calor sendo função não linear de T causam tal particularidade (PATANKAR, 1980).

O problema proposto adota uma geometria bidimensional com condutividade térmica e geração interna de calor constantes, condições de contorno não homogêneas e não lineares que são embutidas na variável beta (não linear), tal técnica de resolução de problemas aborda a solução de EDP's.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad \text{em} \quad 0 < x < L_x \quad \text{e} \quad 0 < y < L_y \quad (3.6)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = \gamma T - \beta \quad \text{para} \quad x = L_x \quad (3.7a)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = \gamma T - \beta \quad \text{para} \quad x = 0 \quad (3.7b)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = \gamma T - \beta \quad \text{para} \quad y = L_y \quad (3.7c)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial y} = \gamma T - \beta \quad \text{para} \quad y = 0 \quad (3.7d)$$

A equação (3.8) apresenta a variável beta e é utilizada para inserir os termos de contorno convectivos e radioativos, e varia de acordo com as condições de contorno da placa:

$$\beta = \gamma T - (\sigma |T|^3 T - c + h(T - T_\infty)) \quad (3.8)$$

Para metodologia de verificação e validação do algoritmo, utilizar-se-á a regra do trapézio como ferramenta de aproximação de integrais:

$$\int_a^b f(x) dx = [f(x_a) + f(x_b)] \left[\frac{(b-a)}{2} \right] \quad (3.9)$$

A resolução numérica de equações diferenciais pode depender de modo bastante intenso das condições de contorno. Considerando as três condições de contorno usuais para equações diferenciais, tem-se as condições de (JUNIOR & SCHULZ, 2012):

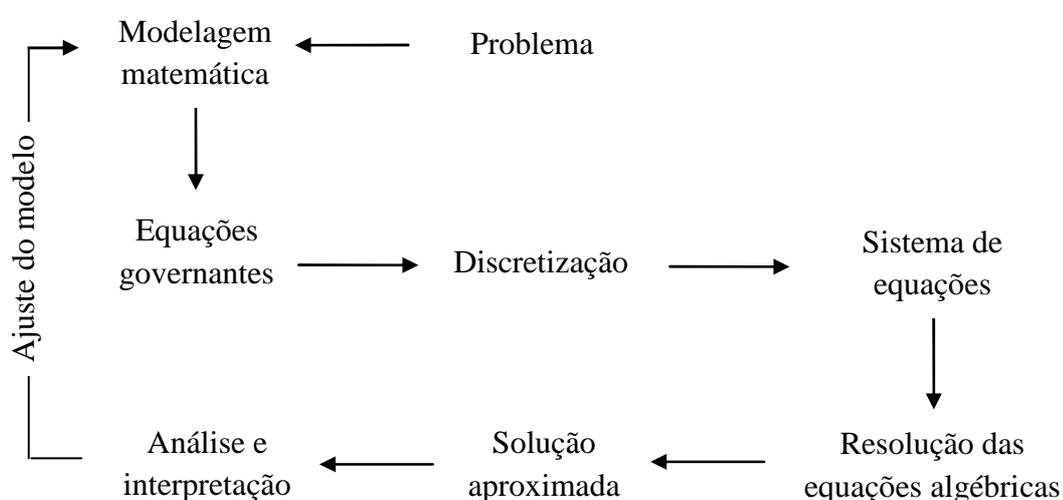
- ✓ Dirichlet: um valor específico da variável dependente é fornecido no contorno;
- ✓ Neumann: um valor específico para a derivada da variável dependente (ou gradiente) é fornecido no contorno;
- ✓ Cauchy (ou Robin): uma combinação linear dos dois primeiros tipos é fornecida no contorno.

O problema proposto na sua originalidade possui condição de contorno do tipo Robin, porém a metodologia proposta simplifica sobre maneira a convergência da solução, impondo uma condição de contorno do tipo Neumann, sem vinculação física, mas sim como uma ferramenta matemática eficaz.

4. MÉTODO DE DISCRETIZAÇÃO

Fletcher (2013) afirma que técnicas computacionais estão mais próximas das experimentais do que as teóricas. Tanto que, atualmente, é comum encontrarmos a expressão "experimentos numéricos", em referência às simulações de um mesmo fenômeno realizadas com diferentes parâmetros. A figura 4.1 denota a metodologia de resolução numérica:

Figura 4.1 –Algoritmo básico para resolução de problemas



Fonte: Adaptado de FORTUNA, 2012.

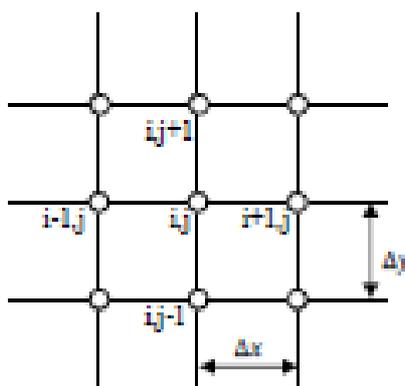
Para tratar o modelo computacionalmente, é necessário expressar de forma adequada às equações e a região contínua R , ou domínio, em que elas são válidas. Como não podemos obter soluções numéricas sobre uma região contínua, devido aos infinitos pontos da mesma, faz-se necessário discretizar o domínio, ou seja, dividi-lo em pontos. Somente nestes pontos é que as soluções serão obtidas, e ao conjunto dos pontos discretos dá-se o nome de malha (FORTUNA, 2012).

A distribuição adequada dos pontos no domínio é fundamental para se obter uma solução numérica representativa do fenômeno modelado. Em seguida, os termos que aparecem escritos em função dos valores das incógnitas em pontos discretos adjacentes. O resultado é um conjunto de equações algébricas, geralmente lineares, que podem ou não estar acopladas. Tal etapa introduz as condições de fronteira do problema, normalmente modificando-se apropriadamente as equações para pontos perto das fronteiras, as condições

da fronteira, juntamente às condições iniciais, as propriedades físicas do fluido e os parâmetros do escoamento especificam o problema a ser tratado (FORTUNA, 2012).

A figura 4.2 representa uma malha bidimensional uniforme, onde o espaçamento da malha é igual para cada intervalo e é representado por $\Delta x = \Delta y = h$, sendo h uma variação finita positiva. Qualquer ponto (x_i, y_j) fica representado na malha por (i, j) e os vizinhos a esses pontos vem representados por $(i^{\pm 1}, j^{\pm 1})$.

Figura 4.2 – Malha discretizada



Fonte: Adaptado de RAMOS, 1998.

4.1. Diferenças finitas

Sperandio et al. (2003) descreve o método das diferenças finitas como uma técnica para a obtenção da solução numérica de uma equação diferencial parcial, em que substitui as derivadas contínuas (e condições de fronteira e as iniciais) pelas fórmulas das diferenças que envolvem somente valores discretos associados com posições da malha. Em toda solução numérica a equação diferencial parcial é substituída por uma aproximação discreta, ou seja, a solução numérica é conhecida somente para um número finito de pontos no domínio físico, enquanto que a solução analítica deve satisfazer a equação diferencial parcial em cada ponto da região. A aproximação discreta resulta em um conjunto de equações algébricas que são calculadas para valores discretos desconhecidos.

O método das diferenças finitas (MDF) nada mais é do que reescrever as equações diferenciais de forma que as derivadas sejam tomadas em intervalos finitos e não infinitesimais.

Supondo corpo isotrópico e convexo, o método das diferenças finitas é obtido através do truncamento da série de Taylor, como mostrado (ÖZISIK, 1993):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (4.1)$$

Para condição progressiva, tem-se:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) \quad (4.2)$$

Ou,

$$f(x + h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} + \dots \quad (4.3)$$

Para condição regressiva:

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) \quad (4.4)$$

Ou,

$$f(x - h) = f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \dots + (-1)^n \frac{h^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} + \dots \quad (4.5)$$

Truncando-se as equações (4.3) e (4.5) e depois somando-as, obtém:

$$\frac{2df}{dx} = \frac{f(x + h) - f(x)}{\Delta x} + \frac{f(x) - f(x - h)}{\Delta x} \quad (4.6)$$

Analisando-se a função f , no espaço unidimensional tem-se para a primeira derivada, as diferenças finitas progressivas, regressivas e centrais como mostram as equações (4.7), (4.8) e (4.9), respectivamente (ÖZISIK, 1993):

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (4.7)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (4.8)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (4.9)$$

Analisando-se a função f , n espaço unidimensional tem-se para a segunda derivada (ÖZISIK, 1993):

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{f(x) + f(x+2h) - 2f(x+h)}{h^2} \quad (4.10)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{f(x-2h) + f(x) - 2f(x-h)}{h^2} \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{f(x-h) + f(x+h) - 2f(x)}{h^2} \quad (4.12)$$

Fortuna (2000) faz a descrição dos esquemas citando que quando é utilizado o resultado de uma solução num instante anterior já conhecida para calcular a solução posterior desejada, o esquema de discretização é dito explícito.

A resolução de problemas de condução de calor pelo método de diferenças finitas resulta em sistemas de equações algébricas, que devem ser resolvidos por métodos diretos ou iterativos. Fortuna (2000) e Özisik (1984) descrevem as vantagens e desvantagens da utilização de cada método.

5. MODELO NUMÉRICO

A análise numérica de um problema propicia informações úteis para o projeto e uma interessante visão dos processos físicos, além de enriquecer informações experimentais, suprimindo detalhes que podem ser difíceis ou mesmo impossíveis de se fazer a medição.

Ela pode ser feita com um custo e um tempo muito inferior em relação ao requerido para um teste experimental correspondente. Enquanto somente umas poucas quantidades podem ser convenientemente medidas em um estudo experimental normal, a solução numérica fornece detalhes completos da distribuição dos componentes de velocidade, pressão, temperatura, entre outros parâmetros, desde que se tenha um modelo que represente adequadamente os fenômenos envolvidos.

Por outro lado, é importante validar os resultados numéricos por comparação com dados experimentais representativos. Análises numéricas podem ser usadas para suplementar e enriquecer uma investigação experimental reduzindo a quantidade de testes experimentais através de uma otimização de um dado projeto experimental.

As equações diferenciais parciais representadas no modelo matemático serão agora substituídas por um sistema de equações algébricas discretizadas pelo método das diferenças finitas previamente demonstrado. Vale ressaltar que tais equações foram anteriormente representadas, supondo tanto para o coeficiente de condutividade térmica, quanto para o termo de geração interna de calor valores constantes. Tais equações algébricas serão compiladas juntamente com o software MatLab.

A resolução da malha numérica, definida pelo tamanho dos espaçamentos, determina o quão bem os perfis das propriedades físicas desconhecidas são capturadas pela simulação numérica. Por isso é muito importante o processo de escolha da malha para tratamento de todo e qualquer problema numérico e para que se tenha uma boa acuidade dos resultados obtidos.

5.1. Erros Numéricos

Embora seja sempre feito um grande esforço para se obter a solução "exata" de um problema, isso raramente acontece, devido as incertezas e erros que podem aparecer em cada

passo da formulação e solução de problemas. A natureza destas incertezas e os erros introduzidos na parte numérica computacional são encontrados facilmente na literatura, como em Rice (1983).

A importância de se analisar detalhadamente as incertezas dos resultados numéricos é nos dias de hoje enfatizada pela maioria dos livros técnicos. A maior parte dos trabalhos referentes à simulação numérica indica quanto a solução depende do tamanho da malha computacional que está sendo utilizada. Assim, a distribuição não uniforme das linhas da malha tem que ser feita cuidadosamente para que sejam obtidos resultados numéricos precisos. Portanto, devem ser feitos testes de precisão dos resultados em função da malha utilizada levantando-se em conta o grau de não uniformidade no espaçamento entre os pontos da malha (RAMOS, 1998).

5.2. Equações discretizadas

O problema proposto neste trabalho será representado por uma malha uniforme, estruturada e cartesiana, ou seja, uma malha cujos pontos estão uniformemente espaçados, pontos estes com regularidade em seus espaçamentos.

Intuitivamente, quanto maior for o número de pontos discretos, isto é, quanto mais refinada for a malha, mais fiel ao modelo será o resultado numérico obtido (FORTUNA, 2012).

As equações foram discretizadas pelo método das diferenças finitas e explicitadas analiticamente.

5.2.1. Interior

Substituindo-se as equações (4.12) na equação (3.6), obtém-se:

$$\frac{T(i + \Delta x, j) + T(i - \Delta x, j) - 2T(i, j)}{\Delta x^2} + \frac{T(i, j + \Delta y) + T(i, j - \Delta y) - 2T(i, j)}{\Delta y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (5.1)$$

Alterando-se o lado das parcelas que contenham o termo $T(i, j)$,

$$\frac{T(i + \Delta x, j) + T(i - \Delta x, j)}{\Delta x^2} + \frac{T(i, j + \Delta y) + T(i, j - \Delta y)}{\Delta y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{2T(i, j)}{\Delta x^2} + \frac{2T(i, j)}{\Delta y^2} \quad (5.2)$$

Igualando-se os denominadores,

$$\Delta y^2 [T(i + \Delta x, j) + T(i - \Delta x, j)] + \Delta x^2 [T(i, j + \Delta y) + T(i, j - \Delta y)] + \Delta x^2 \cdot \Delta y^2 \cdot \left[\frac{\dot{q}}{k} \right] = 2T(i, j) [\Delta y^2 + \Delta x^2] \quad (5.3)$$

Portanto, finalmente isolando-se o termo $T(i, j)$, temos para equação representativa da difusão de calor interna, a equação (5.4) como segue:

$$T(i, j) = \frac{\Delta y^2 [T(i + \Delta x, j) + T(i - \Delta x, j)] + \Delta x^2 [T(i, j + \Delta y) + T(i, j - \Delta y)] + \Delta x^2 \cdot \Delta y^2 \cdot \left[\frac{\dot{q}}{k} \right]}{2\Delta y^2 + 2\Delta x^2} \quad (5.4)$$

5.2.2. Condições de contorno

- Para $x=0$

Substituindo-se a equação (4.7) na equação (3.7b), obtém-se:

$$\frac{k[T_{(i+1,j)} - T_{(i,j)}]}{\Delta x} = \gamma T(i, j) - \beta \quad (5.5)$$

Abrindo a distributiva,

$$\frac{kT_{(i+1,j)}}{\Delta x} - \frac{kT_{(i,j)}}{\Delta x} = \gamma T(i, j) - \beta \quad (5.6)$$

Alterando-se o lado das parcelas que contenham o termo $T(i, j)$,

$$\frac{kT_{(i+1,j)}}{\Delta x} + \beta = T(i,j) \cdot \left[\gamma + \frac{k}{\Delta x} \right] \quad (5.7)$$

Isolando-se o termo $T(i,j)$,

$$T(i,j) = \frac{kT_{(i+1,j)} + \beta \cdot \Delta x}{\gamma \Delta x + k} \quad (5.8)$$

Portanto, finalmente temos para equação representativa do contorno na face ($i=1$), a equação (5.9) que segue:

$$T(1,j) = \frac{kT_{(2,j)} + \beta \cdot \Delta x}{\gamma \Delta x + k} \quad (5.9)$$

- **Para $x = L_x$**

Substituindo-se as equações (4.8) na equação (3.7a), obtém-se:

$$\frac{-k[T_{(i,j)} - T_{(i-1,j)}]}{\Delta x} = \gamma T(i,j) - \beta \quad (5.10)$$

Abrindo a distributiva,

$$-\frac{kT_{(i,j)}}{\Delta x} + \frac{kT_{(i-1,j)}}{\Delta x} = \gamma T(i,j) - \beta \quad (5.11)$$

Alterando-se o lado das parcelas que contenham o termo $T(i,j)$,

$$\frac{kT_{(i-1,j)}}{\Delta x} + \beta = T(i,j) \cdot \left[\gamma + \frac{k}{\Delta x} \right] \quad (5.12)$$

Isolando-se o termo $T(i,j)$,

$$T(i,j) = \frac{kT_{(i-1,j)} + \beta \cdot \Delta x}{\gamma \Delta x + k} \quad (5.13)$$

Portanto, finalmente temos para equação representativa do contorno na face ($i = i_{max}$), a equação (5.14) que segue:

$$T(i_{max}, j) = \frac{kT_{(i_{max}-1, j)} + \beta \cdot \Delta x}{\gamma \Delta x + k} \quad (5.14)$$

- Para $y=0$

Substituindo-se as equações (4.7) na equação (3.7d), obtém-se:

$$\frac{k[T_{(i, j+1)} - T_{(i, j)}]}{\Delta y} = \gamma T_{(i, j)} - \beta \quad (5.15)$$

Abrindo a distributiva,

$$\frac{kT_{(i, j+1)}}{\Delta y} - \frac{kT_{(i, j)}}{\Delta y} = \gamma T_{(i, j)} - \beta \quad (5.16)$$

Alterando-se o lado das parcelas que contenham o termo $T_{(i, j)}$,

$$\frac{kT_{(i, j+1)}}{\Delta y} + \beta = T_{(i, j)} \cdot \left[\gamma + \frac{k}{\Delta x} \right] \quad (5.17)$$

Isolando-se o termo $T_{(i, j)}$,

$$T_{(i, j)} = \frac{kT_{(i, j+1)} + \beta \cdot \Delta y}{\gamma \Delta y + k} \quad (5.18)$$

Portanto, finalmente temos para equação representativa do contorno na face ($j=1$), a equação (5.19) que segue:

$$T_{(i, 1)} = \frac{kT_{(i, 2)} + \beta \cdot \Delta y}{\gamma \Delta y + k} \quad (5.19)$$

- Para $y = L_y$

Substituindo-se as equações (4.8) na equação (3.7c), obtém-se:

$$\frac{-k[T_{(i,j)} - T_{(i,j-1)}]}{\Delta y} = \gamma T_{(i,j)} - \beta \quad (5.20)$$

Abrindo a distributiva,

$$-\frac{kT_{(i,j)}}{\Delta y} + \frac{kT_{(i,j-1)}}{\Delta y} = \gamma T_{(i,j)} - \beta \quad (5.21)$$

Alterando-se o lado das parcelas que contenham o termo $T_{(i,j)}$,

$$\frac{kT_{(i,j-1)}}{\Delta y} + \beta = T_{(i,j)} \cdot \left[\gamma + \frac{k}{\Delta y} \right] \quad (5.22)$$

Isolando-se o termo $T_{(i,j)}$,

$$T_{(i,j)} = \frac{kT_{(i,j-1)} + \beta \cdot \Delta y}{\gamma \Delta y + k} \quad (5.23)$$

Portanto, finalmente temos para equação representativa do contorno na face ($j = j_{max}$), a equação (5.24) que segue:

$$T_{(i,j_{max})} = \frac{kT_{(i,j_{max}-1)} + \beta \cdot \Delta y}{\gamma \Delta y + k} \quad (5.24)$$

5.3. Verificação e validação

Erros sutis de programação ou de condições de fronteira podem fazer uma simulação fornecer resultados visualmente plausíveis, mas fisicamente incompatíveis com o problema apresentado (FORTUNA, 2012).

A etapa de verificação determina com que grau a implementação do modelo, representado por equações, parâmetros e métodos numéricos adotados, corresponde à sua descrição conceitual, isto é, se o modelo está corretamente implementado. Os resultados numéricos fornecidos pela implementação do modelo são comparados a outras soluções, consideradas "de referência". Essas soluções podem ser analíticas, numéricas ou experimentais (FORTUNA, 2012).

Já a etapa de validação quantifica o grau de representatividade do modelo em relação ao fenômeno físico real. Essa análise é normalmente realizada por comparações sistemáticas com resultados experimentais, representativos dos tipos de fenômenos nos quais se espera utilizar o simulador (FORTUNA, 2012).

A verificação não leva em conta o grau de fidelidade entre o modelo e o fenômeno físico real. Ela somente busca determinar se o modelo do fenômeno, sua representação matemática e o programa de computador que implementa esse modelo, são consistentes entre si. A verificação tem o objetivo de estimar a confiabilidade do processo de resolução do problema, ou seja, a de avaliar se erros numéricos estão interferindo na solução.

A validação fornece evidências de que o modelo sendo utilizado é representativo do fenômeno físico, ou seja, que o problema correto está sendo resolvido. O processo de verificação é a primeira etapa na avaliação do código. Apesar de ser complexo, é mais simples do que a validação, já que esta deve analisar o grau de fidelidade com o qual o modelo representa as condições do mundo real. Portanto, a validação permite avaliar a influência dos erros de modelagem na solução obtida (FORTUNA, 2012).

No presente trabalho, tais etapas descritas acima foram realizadas utilizando-se do recurso numérico denominado regra do trapézio simplificada, recurso este utilizado quando não é possível determinar uma função exata e tal função é aproximada em determinado trecho por uma reta.

Tendo-se as condições do modelo matemático descritas abaixo:

$$\text{div}(k\text{grad}T) + \dot{q} = 0, \quad \Omega \quad (5.25)$$

$$-k\text{grad}T\vec{n} = \gamma T - \beta, \quad \partial\Omega \quad (5.26)$$

Para o contorno, equação (5.26), tem-se:

$$-kgradT\vec{n} = \gamma\left(T - \frac{\beta}{\gamma}\right), \quad \partial\Omega \quad (5.27)$$

Logo:

$$T \rightarrow \frac{\beta}{\gamma} \quad (5.28)$$

Analisando-se tal proposição com o auxílio do MatLab (vide anexo) e utilizando-se os valores de referência, constata-se numericamente que a temperatura tende para algo em torno de 10^{-5} , tal qual previsto analiticamente.

Para o interior, integra-se a equação (5.25) na superfície,

$$\int_{\Omega} (div(KgradT) + \dot{q})dV = 0 \quad (5.29)$$

Realizando a distributiva,

$$\int_{\partial\Omega} kgradT\vec{n}dA + \int_{\Omega} \dot{q}dV = 0 \quad (5.30)$$

Substituindo a equação (5.26) na equação (5.30),

$$\int_{\partial\Omega} -(\gamma T - \beta)dA + \int_{\Omega} \dot{q}dV = 0 \quad (5.31)$$

Logo, determina-se para processos tridimensionais e bidimensionais, respectivamente:

$$\int_{\Omega} \dot{q}dV = \int_{\partial\Omega} (\gamma T - \beta)dA \quad (5.32)$$

$$\int \dot{q}dA = \int (\gamma T - \beta)dx \quad (5.33)$$

Utilizando a regra do trapézio (3.9) e comparando-a com a igualdade (5.33), temos:

- Igualdade (5.33)

$$\int \dot{q} dA = \int (\gamma T - \beta) dx \quad (5.34a)$$

$$\dot{q} \cdot x|_0^{L_x} \cdot y|_0^{L_y} = \int (\gamma T - \beta) dx \quad (5.34b)$$

$$\dot{q} \cdot L_x \cdot L_y = \int (\gamma T - \beta) dx \quad (5.34c)$$

- Regra do trapézio (3.9)

$$f(x) = \gamma T - \beta \quad (5.35)$$

$$f(i) = \gamma T(i) - \beta_i \quad (5.36)$$

$$f(i+1) = \gamma T(i+1) - \beta_{i+1} \quad (5.37)$$

$$\int f(x) dx = \gamma \{ [T(i) + T(i+1)] - \beta_i - \beta_{i+1} \} \frac{\Delta x}{2} \quad (5.38)$$

As equações acima serão numericamente testadas e comprovadas no próximo capítulo.

6. RESULTADOS DO MODELO

Neste capítulo serão apresentados e discutidos os resultados obtidos, partindo da simulação numérica modelada e descrita nos capítulos precedentes.

O critério de convergência foi adotado e definido pelo módulo da diferença entre a solução na iteração anterior e atual, o maior valor da diferença entre todos os pontos nodais deveria ser menor que um erro estimado (*tolerância* $T = 1.10^{-6}$). Gama (2000) ressalta que valores adotados para a variável γ são definidos baseados em critérios de mínimo e máximo admissível para convergência do algoritmo, neste trabalho adotou-se inicialmente $\gamma = 1. d2$.

A solução final para cada caso considerado foi obtida partindo-se de uma malha "grosseira" de onde se obtinha uma solução convergida. A partir dessa solução, o gradiente de temperatura era observado e a malha refinada novamente.

A princípio verificou-se a disseminação das condições de contorno adotando-se a variável β como uma constante, condição semelhante à condição de contorno de Neumann. Posteriormente verificou-se a disseminação das condições do contorno utilizando-se a variável β com e sem simetria geométrica, embutindo assim nesta variável, condições de contorno convectivas e radioativas. Em razão desta metodologia constatou-se a diferença na rapidez na convergência, uma redução brusca no número de iterações.

Inicialmente foram feitos teste de malha para cada um dos casos a serem estudados numericamente, seguindo os parâmetros definidos pelo modelo matemático, para posteriormente serem feitas as análises de verificação e validação do software, tal qual citado nos capítulos precedentes.

A princípio serão utilizadas malhas cujo domínio Ω é discretizado utilizando-se 60 nós em ambas as direções x e y ($imax=jmax=60$), tendo-se uma placa de dimensões $L_x = L_y = 10$ e dimensão entre nós $\Delta x = \Delta y = L_x / (imax - 1) = L_y / (jmax - 1)$.

A seguir demonstram-se três exemplos cujo domínio Ω é discretizado com algumas condições distintas.

6.1. Exemplo 1

Neste primeiro exemplo, a característica principal é a utilização da variável beta como constante, maiores descrições a respeito do algoritmo encontram-se em anexo.

$$\beta = 1. d - 1 ;$$

$$k = 1 \text{ W/mK};$$

$$\dot{q} = 1 \text{ W/m}^2;$$

$$\gamma = 1. d^2.$$

Figura 6.1 – Campo de temperatura da placa

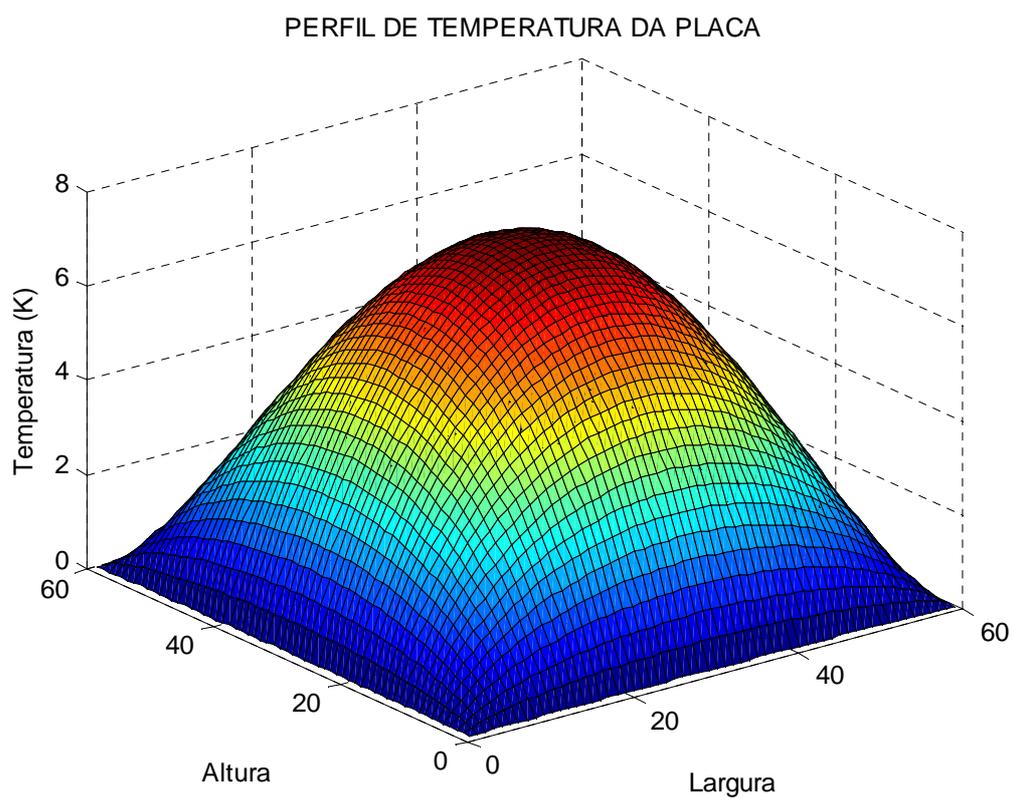
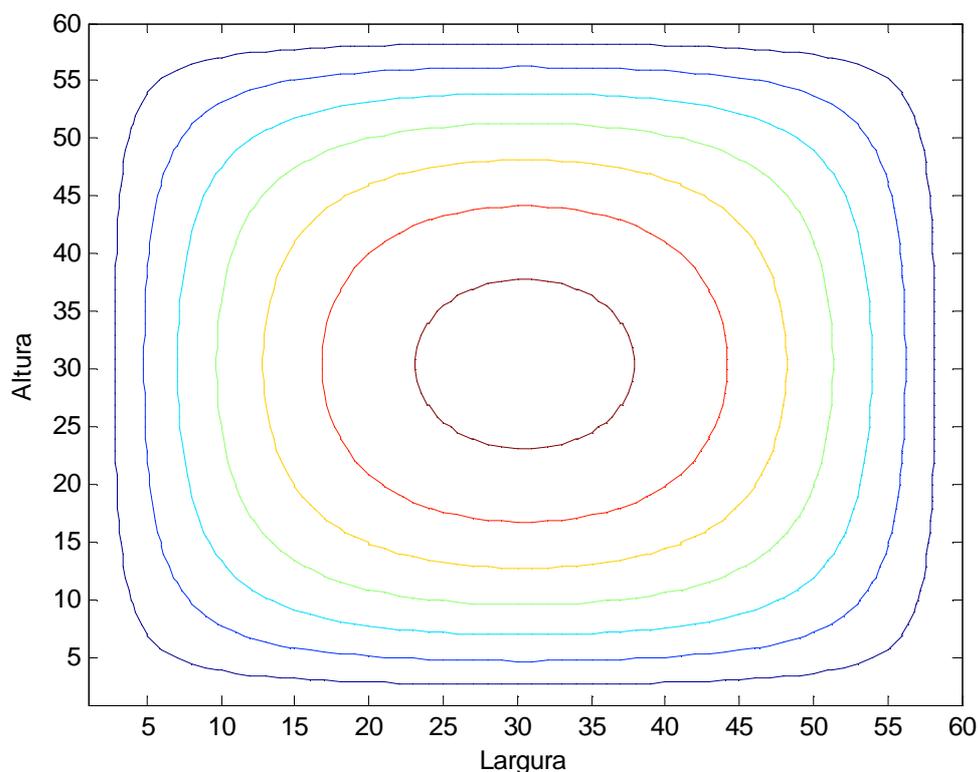


Figura 6.2 – Isotermas



Comparando-se as equações (5.35) e (3.9), verifica-se a validade do algoritmo e comprova-se que o problema proposto está sendo resolvido. A seguir serão mostradas algumas tabelas e gráficos que denotam tal proposição.

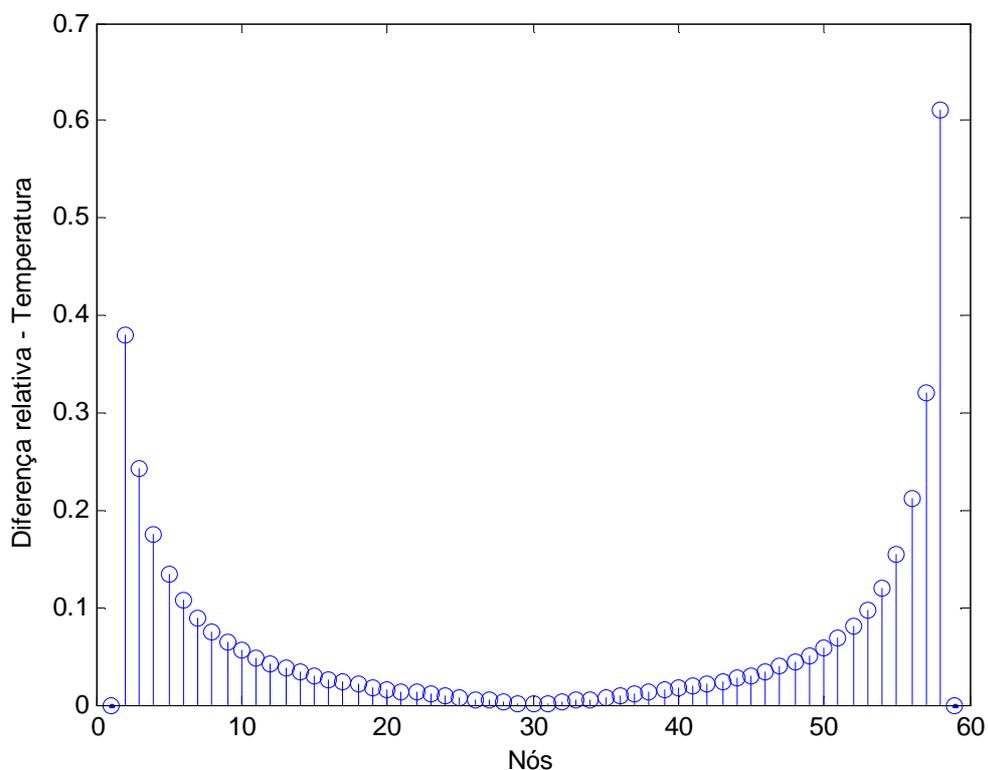
A tabela 6.1 apresenta as diferenças relativas para determinados nós escolhidos aleatoriamente no contorno da malha, observa-se que independente da face escolhida tais valores serão correspondentes, devido à condição inicial de simetria.

Tabela 6.1 – Diferenças relativas das temperaturas

Nós	5	15	25	35	45
Erros relativos	0,134358	0,029517	0,007279	0,007333	0,030415

A figura a seguir mostra os erros relativos para as temperaturas dos nós da malha discretizada.

Figura 6.3 – Diferenças relativas da temperatura em função dos nós



Para erro relativo da malha, utilizando a equação de conservação de energia (vide anexo) obteve-se $\text{Errorel}=0,0140$. O número de iterações até a convergência foi de 3561.

6.2. Exemplo 2

Neste segundo exemplo, a principal característica é a utilização da variável beta sendo atualizada a cada iteração em condições de simetria em todas as faces da placa, maiores descrições a respeito do algoritmo encontram-se em anexo.

$$\beta_i = \alpha\psi_i - (\sigma|\psi_i|^3\psi_i - c + h(\psi_i - T_\infty))$$

$$h = 1 \text{ W/m}^2\text{K};$$

$$k = 1 \text{ W/mK};$$

$$T_\infty = 1\text{K};$$

$$\dot{q} = 1 \text{ W/m}^2;$$

$$\text{sigma} = 1;$$

$$c = 10;$$
$$\gamma = 1. d^2.$$

Figura 6.4 – Campo de temperatura da placa

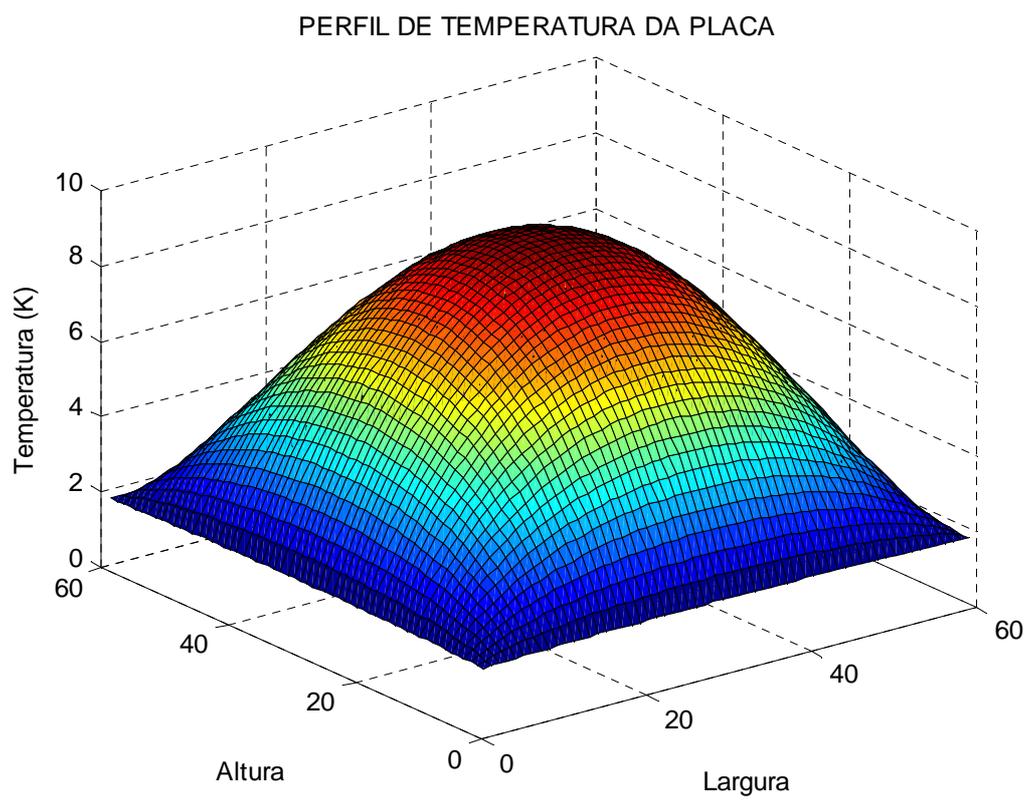
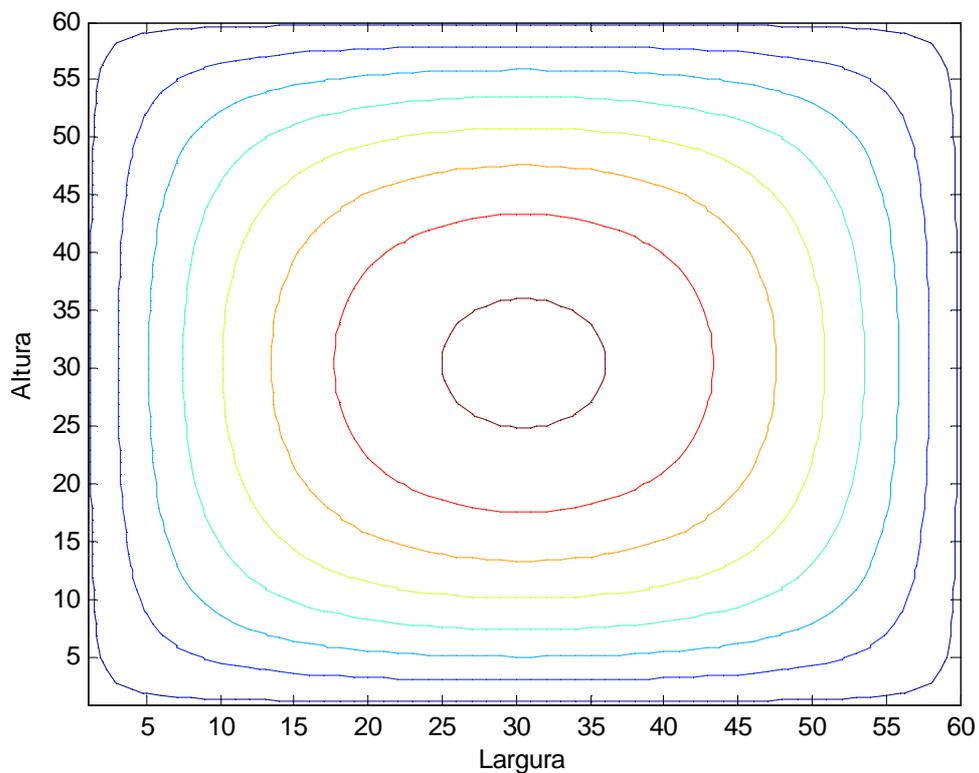


Figura 6.5 – Isotermas



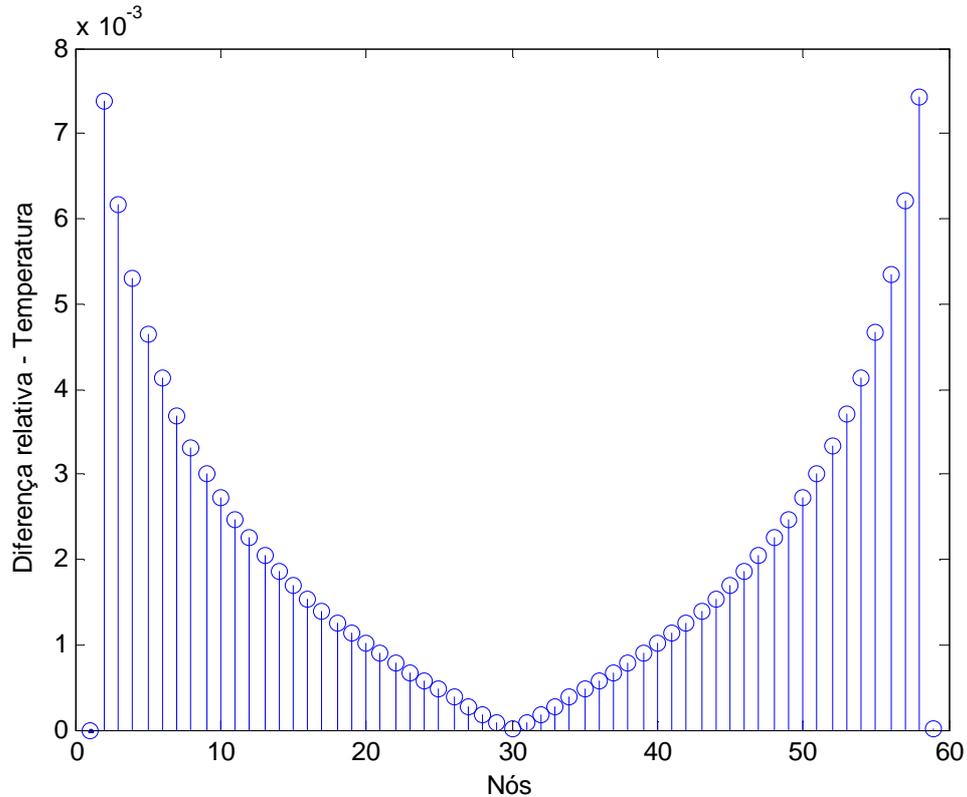
A tabela 6.2 apresenta as diferenças relativas para determinados nós escolhidos aleatoriamente no contorno da malha, observa-se que independente da face escolhida tais valores serão correspondentes devido à condição inicial de simetria.

Tabela 6.2 – Diferenças relativas das temperaturas

Nós	5	15	25	35	45
Erros relativos	0,004644	0,001693	4,719e-4	4,721e-4	0,001696

A figura a seguir mostra as diferenças relativas para as temperaturas dos nós da malha discretizada.

Figura 6.6 – Diferenças relativas da temperatura em função dos nós



Para erro relativo da malha, utilizando a equação de conservação de energia (vide anexo) obteve-se $\text{Errorel}=0,0348$. Refinando-se um pouco malha (100x100) observa-se uma considerável diminuição no erro relativo ($\text{Errorel}=0,0206$), porém a um maior custo computacional. O número de iterações até a convergência foi de 3705 para a malha 60x60 e de 9389 para a malha 100x100.

6.3. Exemplo 3

Neste exemplo 3, a principal característica é a utilização da variável beta sendo atualizada a cada iteração e o termo fonte variando de face a face, ou seja, sem condições de simetria na placa, maiores descrições a respeito do algoritmo encontram-se em anexo.

$$\beta_i = \alpha\psi_i - (\sigma|\psi_i|^3\psi_i - c(1,j) + h(\psi_i - T_\infty))$$

$$\beta_i = \alpha\psi_i - (\sigma|\psi_i|^3\psi_i - c(imax,j) + h(\psi_i - T_\infty))$$

$$\beta_i = \alpha\psi_i - (\sigma|\psi_i|^3\psi_i - c(i, 1) + h(\psi_i - T_\infty))$$

$$\beta_i = \alpha\psi_i - (\sigma|\psi_i|^3\psi_i - c(i, jmax) + h(\psi_i - T_\infty))$$

$$h = 1 \text{ W/m}^2\text{K};$$

$$k = 1 \text{ W/mK};$$

$$T_\infty = 1\text{K};$$

$$\dot{q} = 1 \text{ W/m}^2;$$

$$c(i, 1) = 10;$$

$$c(i, jmax) = 0;$$

$$c(1, j) = 50;$$

$$c(imax, j) = 100;$$

$$\gamma = 1. d2.$$

Figura 6.7 – Campo de temperatura da placa

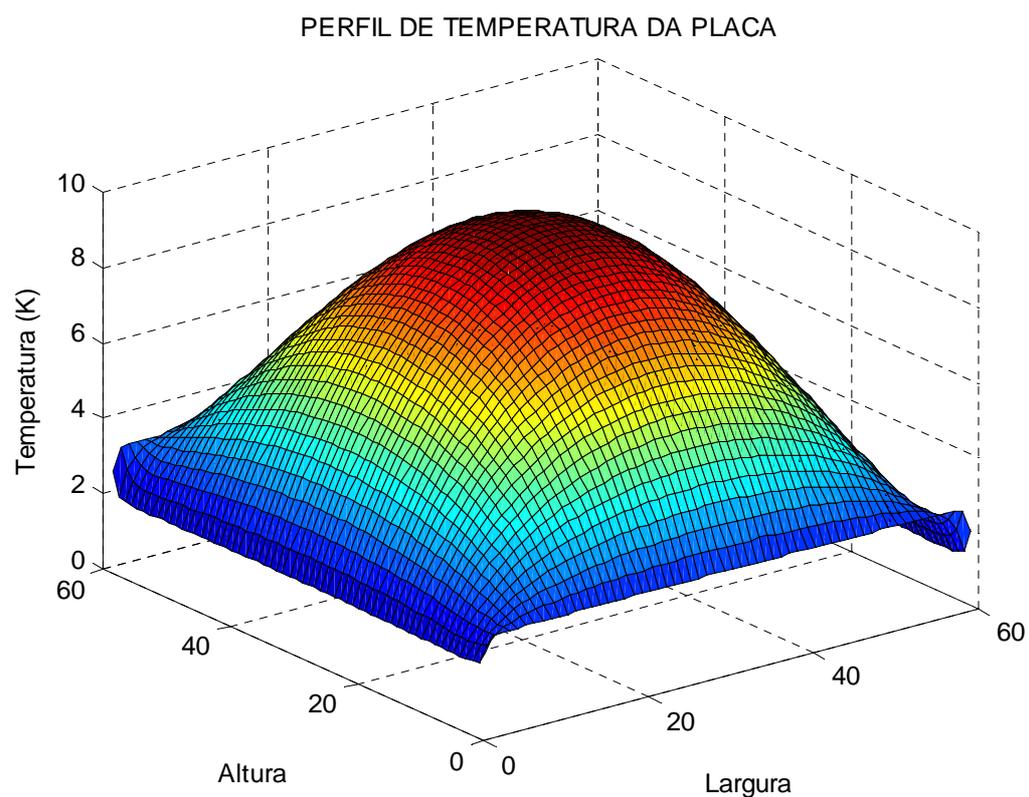
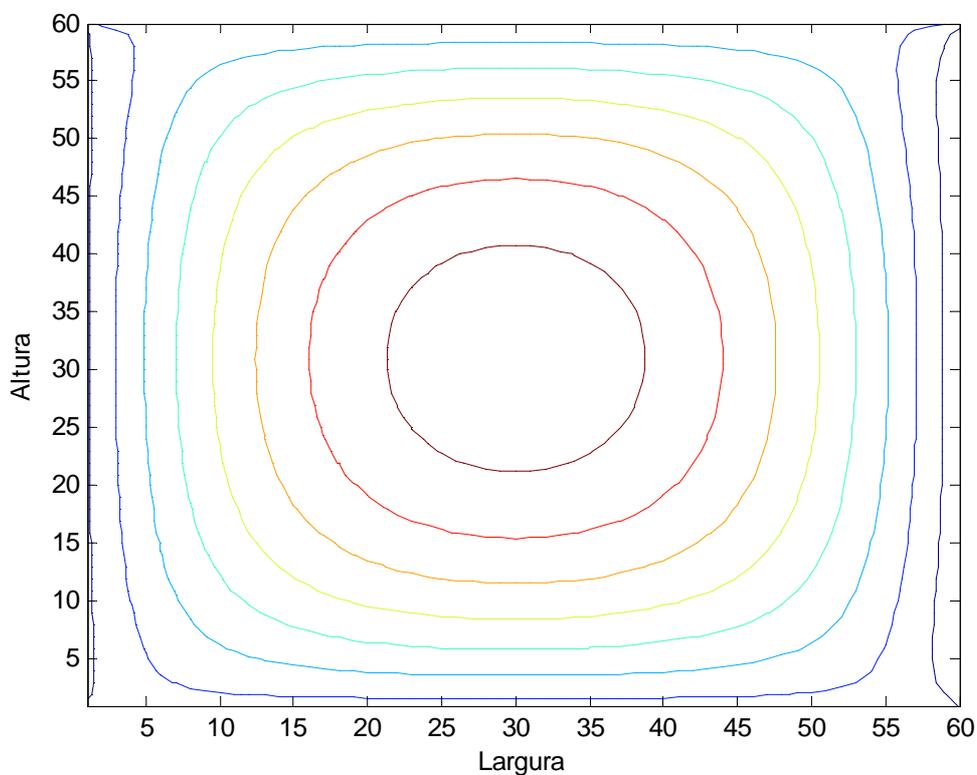


Figura 6.8 – Isotermas



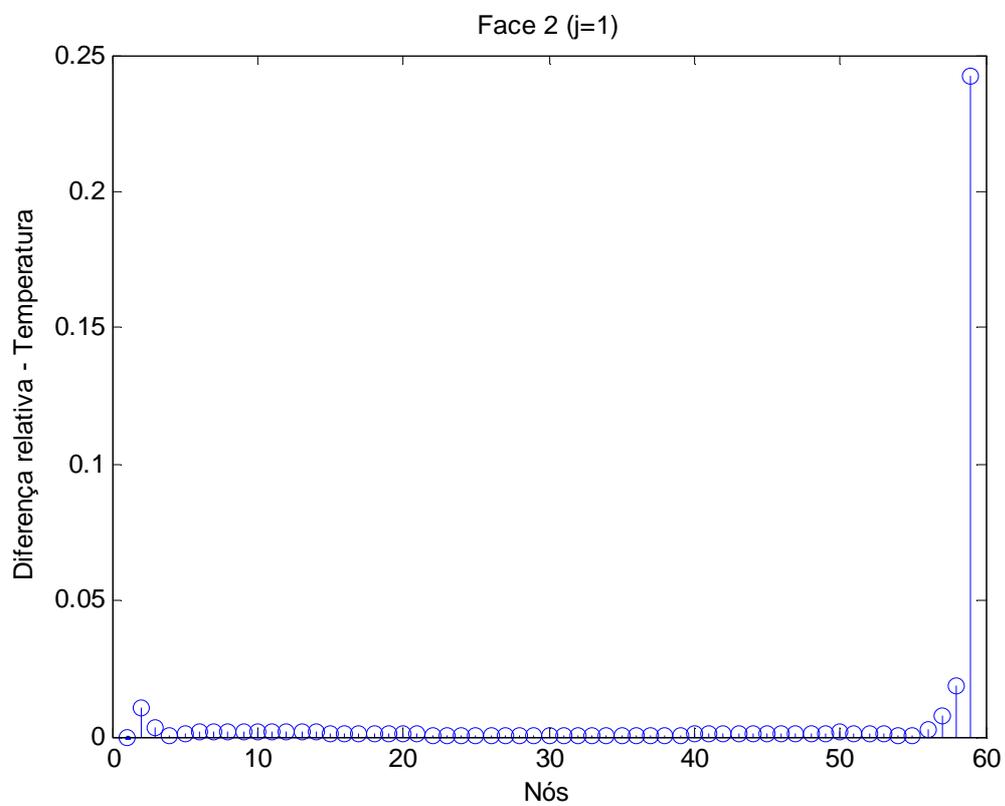
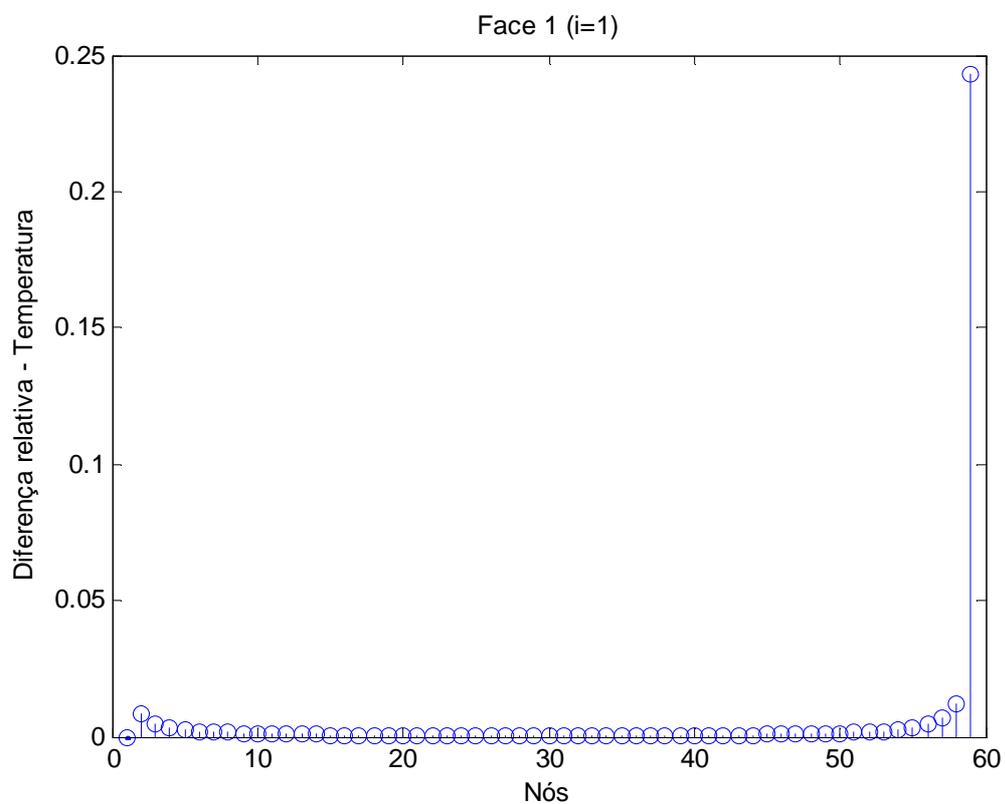
A tabela 6.3 apresenta as diferenças relativas para determinados nós escolhidos aleatoriamente em cada contorno da malha, observa-se tal necessidade devido há condição de não simetria entre os contornos da superfície.

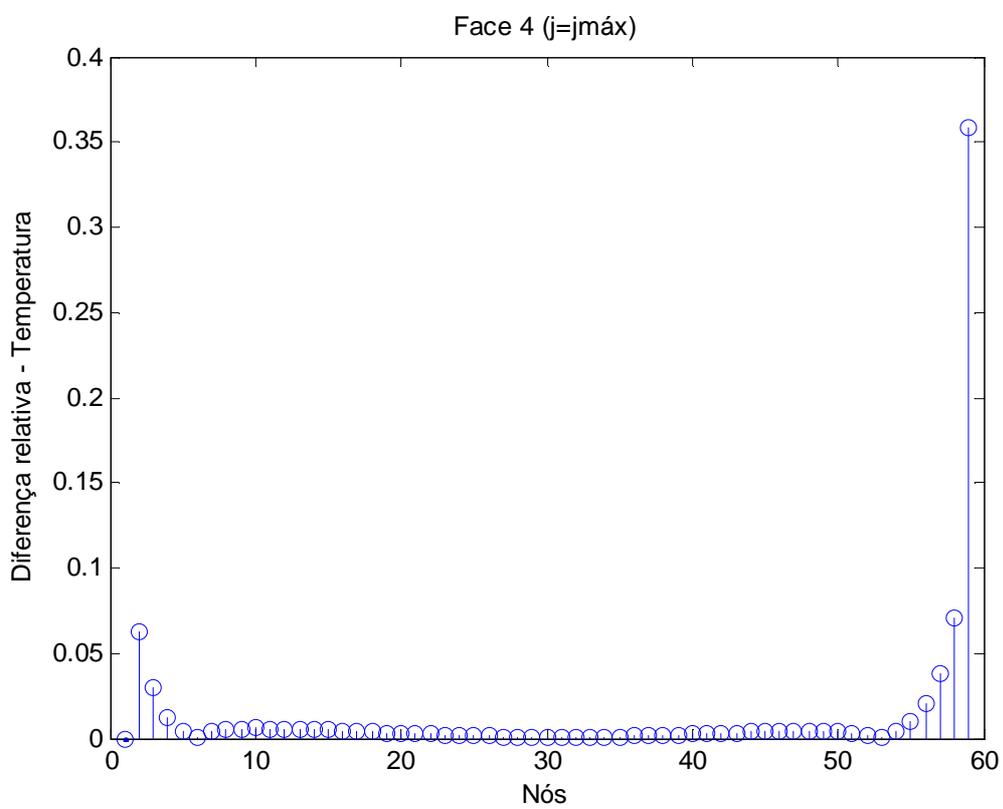
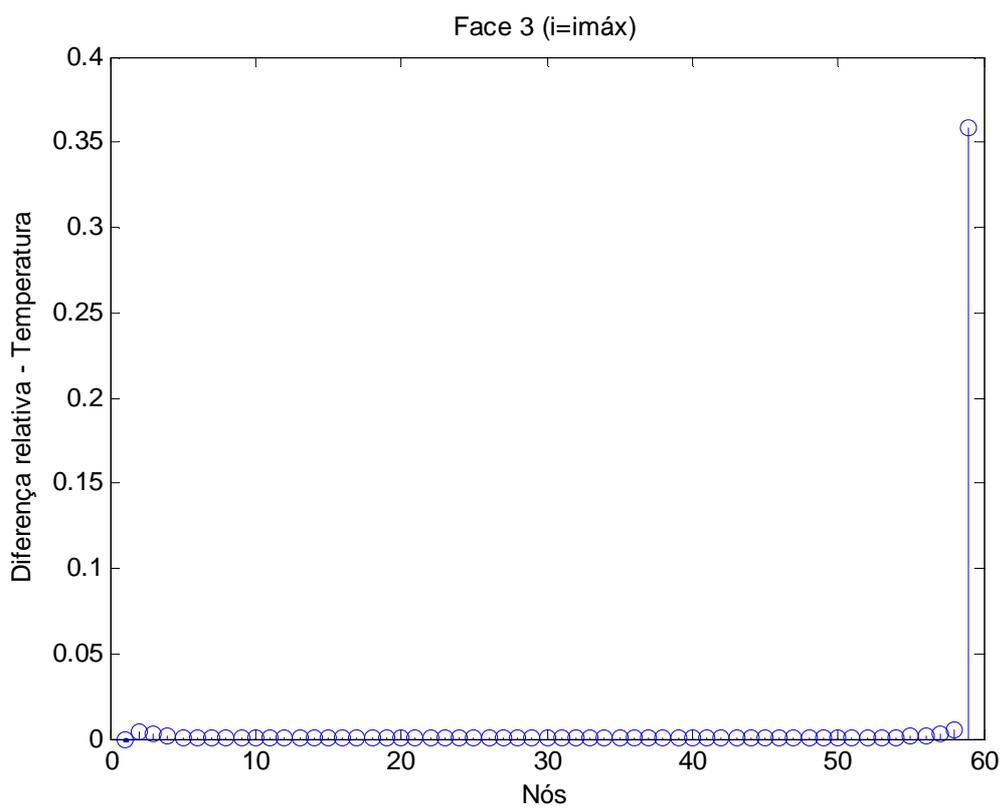
Tabela 6.3 – Diferenças relativas das temperaturas

FACE	Nós				
	5	15	25	35	45
i=1	0,002583	6,753e-4	1,719e-4	2,159e-4	7,639e-4
i=imáx	0,001115	2,579e-4	6,502e-5	8,060e-5	2,88e-4
j=1	0,001261	0,001395	4,438e-4	3,353e-4	0,001171
j=jmáx	0,003677	0,004722	0,001512	0,001105	0,003775

As figuras a seguir mostram as diferenças relativas para as temperaturas dos nós da malha discretizada em cada face.

Figura 6.9 – Diferenças relativas da temperatura em função dos nós em cada face





Para erro relativo da malha, utilizando a equação de conservação de energia (vide anexo) obteve-se $\text{Errorel}=0,0248$. Refinando-se um pouco malha (100x100) observa-se uma considerável diminuição no erro relativo ($\text{Errorel}=0,0114$), porém a um maior custo computacional. O número de iterações até a convergência foi de 3728 para a malha 60x60 e de 9453 para a malha 100x100.

A seguir serão demonstrados os gráficos relativos a algumas iterações aleatórias para o segundo caso onde há condição de simetria utilizando-se diferentes valores de gama, afim de se observar a velocidade de variação do termo beta, termo este dependente de gama. Além da importância do valor do termo gama no processo de convergência.

Veja que a seguir será comprovado que com o termo gama muito grande, o processo demora pouco mais para convergir, portanto ressalta-se a importância ao adotar este termo, para um menor custo computacional possível.

Para $\gamma = 1. d2$, temos:

Figura 6.10 – Iteração 300

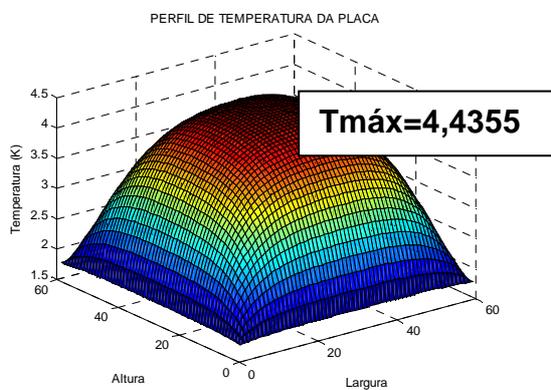


Figura 6.11 – Iteração 400

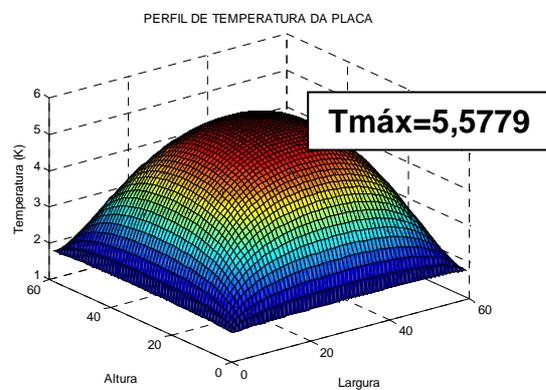


Figura 6.12 – Iteração 500

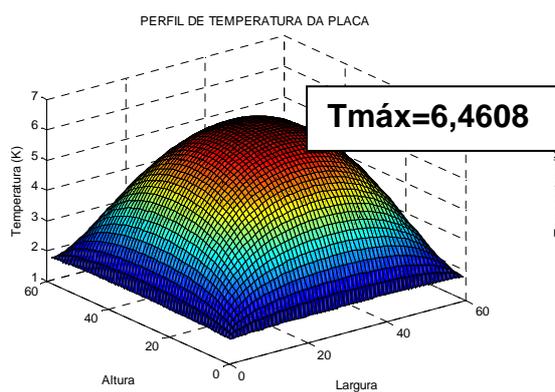


Figura 6.13 – Iteração 1000

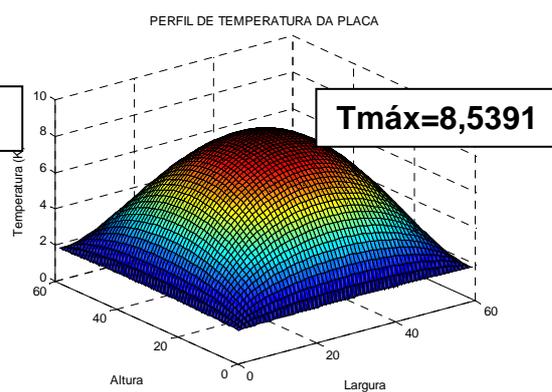


Figura 6.14 – Iteração 2000

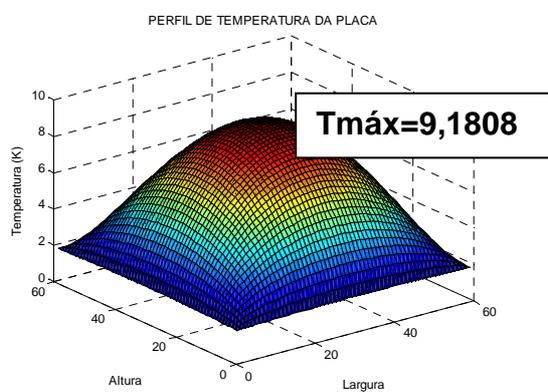
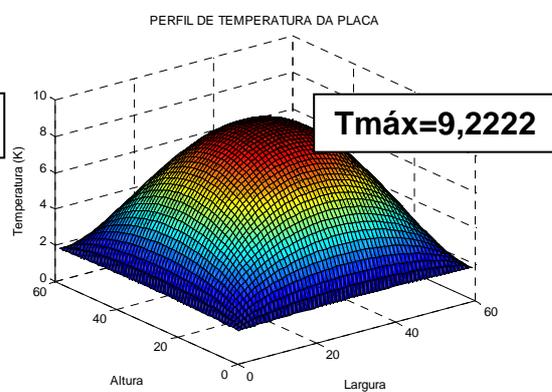


Figura 6.15 – Iteração 3705 (última)



Para $\gamma = 1. d6$, temos:

Figura 6.16 – Iteração 300

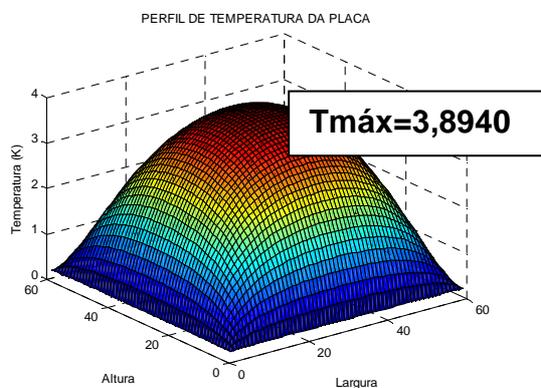


Figura 6.17 – Iteração 400

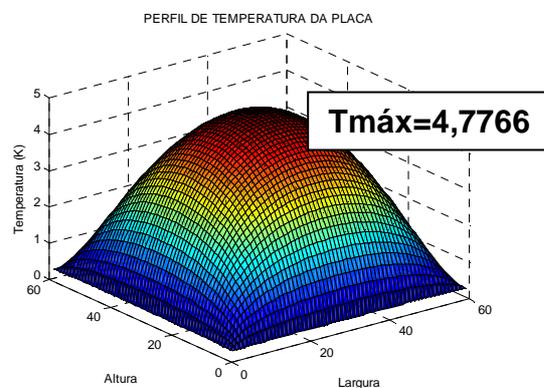


Figura 6.18 – Iteração 500

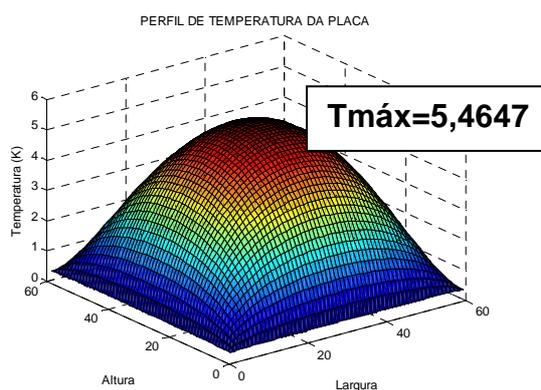


Figura 6.19 – Iteração 1000

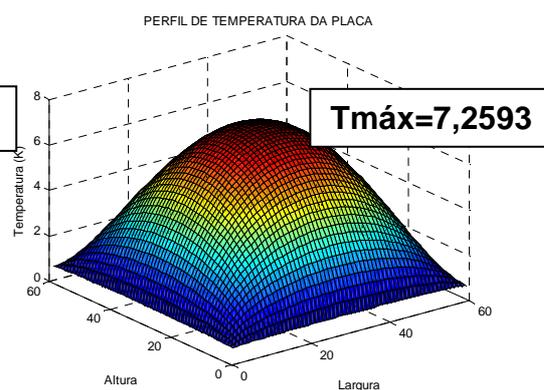


Figura 6.20 – Iteração 2000

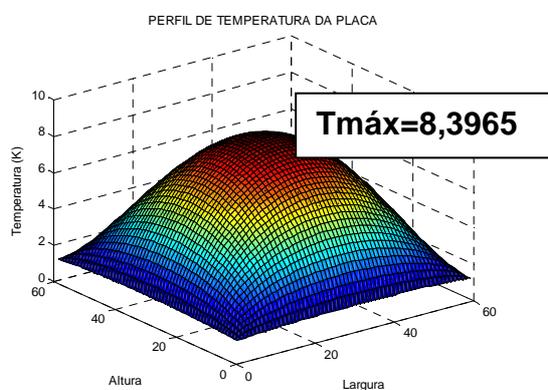
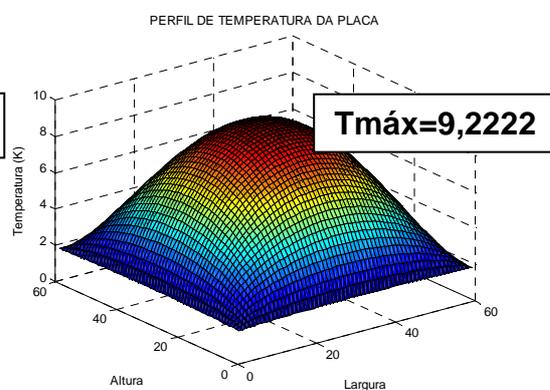


Figura 6.21 – Iteração 7306 (última)



CONCLUSÃO

No trabalho apresentado utilizou-se o método das diferenças finitas com o objetivo de analisar o processo de transferência de calor em uma placa com condições de contorno convectivas e radioativas. Inicialmente foi comprovada a objetividade do método comparando-se resultados analíticos e numéricos com a finalidade de verificar a eficiência do método. Logo após foram realizados três exemplos numéricos para comprovar a utilidade e aplicação de tal metodologia proposta.

Tal estudo, mesmo sendo realizado no âmbito bidimensional tem toda importância, pois sua metodologia é aplicável em qualquer tipo de geometria, para a hipótese bidimensional são realizadas simulações referentes aos processos de transferência de calor em placas eletrônicas, geralmente representadas por processos de transferência de calor por condução, convecção natural e radiação em coordenadas cartesianas. Porém o estudo tridimensional tem vasta aplicação na área industrial, como por exemplo, na previsão do processo de transferência de calor em *flares* das indústrias químicas e petrolíferas que combinam processo de condução de calor, convecção forçada e radiação em superfícies cilíndricas.

A principal conclusão deste estudo é que a metodologia utilizada simplifica a solução do problema de maneira considerável, podendo assim ser testada e utilizada para problemas de maiores expressões.

Em relação a trabalhos futuros, podem-se sugerir alguns estudos:

- Avaliar a influência de problemas transientes utilizando a metodologia apresentada;
- Considerar processo de transferência de calor em uma superfície tridimensional;
- Resolver o mesmo problema para condutividade térmica não constante;
- Utilizar coordenadas cilíndricas para simular o processo de transferência de calor em *flares* industriais.

REFERÊNCIAS

1. ARPACI, V. S. *Conduction heat transfer*, United States of America: Ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1966. 550 p.
2. BEJAN, A. *Convection heat transfer*, United States of America: Ed. Wiley, 2013. 696 p.
3. BEJAN, A. *Heat transfer*, United States of America: Ed. Wiley, 1993. 704 p.
4. BIALECKI, R.; NOWAK, A. J. *Boundary value problems in heat conduction with nonlinear material and nonlinear boundary conditions*, Applied Mathematical Modelling, v. 5 (1981) p.417-421.
5. BRAGA, W. *Transmissão de calor*, São Paulo: Ed. Thomson Learning Pioneira, 2004. 614 p.
6. BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical analysis*, Boston: Ed. Cengage Learning, 2011. 895 p.
7. CARPENTER, J. R.; BRIGGS, D. G.; SERNAS, V. *Combined radiation and developing laminar free convection between vertical flat plates with asymmetric heating*, Journal of Heat Transfer, v. 98 (1976) p.95-100.
8. CARRON, W.; GUIMARÃES, O. *Física volume único*, São Paulo: Ed. Moderna, 2003. 742 p.
9. CARSLAW, H.; JAEGER, J. *Conduction heat transfer*, London: Ed. Clarendon Press, 1959. 510 p.
10. ÇENGEL, Y. A.; BOLES, M. A. *Thermodynamics*, United States of America: Ed. Mc Graw-Hill, 2011. 1024 p.
11. CESS, R. D. *The interaction of thermal radiation with free convection heat transfer*, Int. J. Heat Mass Transfer, v. 9 (1966) p. 1269–1277.
12. CHAPMAN S. J. *Fortran for scientists and engineers*, New York: Ed. Mc Graw-Hill, 2004. 1008 p.
13. CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Numerical methods for engineers*, New York: Ed. Mc Graw-Hill, 2010. 968 p.
14. DEGHAN, A. A.; BEHNIA, M. *Combined natural convection-conduction and radiation heat transfer in a discretely heated open cavity*, Journal of Heat Transfer, v. 118 (1996) p.56-64.
15. FLETCHER, C. A. J. *Computational techniques for fluid dynamics: Fundamental and general techniques*, United States of America: Ed. Springer, 2013. 401 p.

16. FORTUNA, A. O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*, São Paulo: Ed. USP, 2000. 552 p.
17. FRANCO, N. M. B. *Cálculo numérico*, São Paulo: Ed. Pearson Prentice Hall, 2007. 520 p.
18. GAMA, R. M. S. *An upper bound estimate for a class of conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions*, Int. Comm. Heat Mass Transfer, v. 27, n° 7 (2000) p. 955–964.
19. GAMA, R. M. S. *Numerical simulation of the (nonlinear) conduction/radiation heat transfer process in a nonconvex and black cylindrical body*, J. Comp. Phys. 128 (1996) p.341–350.
20. GREENBERG, M. D. *Advanced engineering mathematics*, United States of America, Ed: Pearson, 1998. 1324 p.
21. HOLMAN, J. P.; LLOYD, J. *Heat transfer*, United States of America, Ed: Mc Graw-Hill, 2010. 758 p.
22. HOWELL, J. R.; SIEGEL, R.; MENGUC, M. P. *Thermal radiation heat transfer*, United States of America, Ed: CRC Press, 2010. 987 p.
23. HUNSDORFER, W.; KOREN, B.; LOON, M. V.; VERWER J. G. *A positive finite-difference advection scheme*, Journal of Computational Physics, v.117 (1994) p.35-46.
24. INCROPERA, F. P. *Convection heat transfer in electronic equipment cooling*, Journal of Heat Transfer, v.110, n°43 (1988) p.1097-1111.
25. JUNIOR, G. B. L.; SCHULZ, H. E. *Análise de condições de contorno para a quantificação da transferência de massa unidimensional em regime turbulento*, XXXIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (2012) p.391–397.
26. KIM, S. *A simple direct estimation of temperature-dependent thermal conductivity with Kirchhoff transformation*, Int. Comm. Heat Mass Transfer, v. 28, n° 4 (2001) p.537–544.
27. KREITH, F.; BOHN, M. S. *Principles of heat transfer*, United States of America: Ed. Cengage Learning, 2011. 784 p.
28. LEITHOLD, L. *O Cálculo com geometria analítica*, v.1, São Paulo: Ed. Harbra, 1994. 685 p.
29. LISZKA, T.; ORKISZ, J. *The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics*, Computers & Structures, v. 11 (1980) p.83–95.
30. MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*, Rio de Janeiro: Ed. Livros Técnicos e Científicos, 2004. 460 p.

31. MOITSHEKI, R. J.; HAYAT, T.; MALIK, M. Y. *Some exact solutions of the fin problem with a power law temperature-dependent thermal conductivity*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 11 (2010).
32. OKOYA, S. S.; AJADI, S. O. *Critical parameters for thermal conduction equations*, *Mechanics Research Communications*, v. 26, n° 3 (1999) p.363–370.
33. ÖZISIK, M. N. *Finite difference methods in heat transfer*, United States of America: Ed. CRC Press, 1994. 432 p.
34. ÖZISIK, M. N. *Heat conduction*, United States of America: Ed. John Wiley & Sons Inc., 1993. 692 p.
35. PATANKAR, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*, United States of America: Ed. Mc Graw-Hill, 1980. 205 p.
36. PATANKAR, S. V.; SPALDING, D. B. *A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows*, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v.15, n°10 (1972). p.1787-1806
37. PLANCK, M. *The theory of heat radiation*, United States of America: Ed. Philadelphia, P. Blakiston's Son & Co, 1914. 216 p.
38. QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. *Numerical mathematics*, New York: Ed. Springer, 2000. 669 p.
39. RAMOS, R. A. V. *Análise da convecção natural em superfícies com fontes de calor protuberantes*. 1998. 125f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1998.
40. RICE, J. R. *Numerical methods, software and analysis*, United States of America: Ed. Mc Graw-Hill, 1983. 483 p.
41. SLATTERY, J. C. *Momentum, energy and mass transfer in continua*, United States of America: Ed. Krieger Pub Co, 1981. 682 p.
42. SPARROW, E. M.; CESS, R.D. *Radiation heat transfer*, New York: Hemisphere Publishing Co., 1978. 380 p.
43. SPARROW, E. M.; SHAH, S.; PRAKASH, C. *Natural convection in a vertical channel: Interacting convection and radiation; The vertical plate without shrouding*, *Numerical Heat Transfer*, v.3 (1980) p.297-314.
44. SPERANDIO, D.; MENDES, J. T; SILVA, L. H. M. *Cálculo numérico - características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos*, São Paulo: Ed. Prentice Hall, 2003. 354 p.
45. THOMPSON, J. F.; WARSI, Z. U. A.; MASTIN, C. W. *Numerical grid generation*, United States of America: Ed. North-Holland, 1985. 327 p.

ANEXOS

a) Simulação numérica para beta constante

%%% Beta Constante %%%

close all; clear all; clc; format short;

%Beta Constante

%Geometria

Lx=10;

Ly=10;

imax=60;

jmax=60;

deltax=Lx/(imax-1);

deltay=Ly/(jmax-1);

%Parâmetros

q=1;

k=1;

erroT=1;

toleranciaT=1.d-6;

gama=1.d2; *%Menor valor de gama para onde n° iteração não se altera*

beta=1.d-1;

%sigma=1;

%c=1;

%Tamb=1;

%h=1;

%Condições Iniciais

T=zeros(imax,jmax);

Tn=zeros(imax,jmax);

%beta=zeros(imax,jmax);

n=0; *%Contador*

while erroT>toleranciaT

 for i=2:imax-1

 for j=2:jmax-1

%Interior

$T(i,j)=(deltay^2*(T(i+1,j)+T(i-1,j))...$

$+deltax^2*(T(i,j+1)+T(i,j-1))...$

$+(deltax^2*deltay^2*q/k)/(2*deltay^2+2*deltax^2);$

%Face 1

$T(1,j)=(k*T(2,j)+beta*deltax)/(gama*deltax+k);$

%Face 3

$T(imax,j)=(k*T(imax-1,j)+beta*deltax)/(gama*deltax+k);$

%Face 2

$T(i,1)=(k*T(i,2)+beta*deltay)/(gama*deltay+k);$

%Face 4

$T(i,jmax)=(k*T(i,jmax-1)+beta*deltay)/(gama*deltay+k);$

```

    %beta(i,j)=gama*T(i,j)-(sigma*abs(T(i,j)^3)*T(i,j)-c+h*(T(i,j)-Tamb));

    end
end

v=max(abs(T-Tn)); % Vetor com valores máximos
erroT=max(abs(v)); % Máximo valor do vetor
n=n+1 % Implemento do contador
Tn=T; % Atualização da matriz
end

% Vértices
T(1,1)=(T(1,2)+T(2,1))/2; % Vértice A
T(imax,1)=(T(imax-1,1)+T(imax,2))/2; % Vértice B
T(imax,jmax)=(T(imax-1,jmax)+T(imax,jmax-1))/2; % Vértice C
T(1,jmax)=(T(1,jmax-1)+T(2,jmax))/2; % Vértice D

%%%%%% Verificação e Validação %%%%%%

% Testando o Algoritmo
% T -> (beta/gama)
for i=2:imax-1
    T1(i)=T(1,i);
    T3(i)=T(imax,i);
    T2(i)=T(i,1);
    T4(i)=T(i,jmax);
end

% Calculando Erro Relativo
for i=2:imax-1
    Errorel1(i)=abs((T(1,i+1)-T(1,i))/T(i+1));
    Errorel3(i)=abs((T(imax,i+1)-T(imax,i))/T(imax,i+1));
    Errorel2(i)=abs((T(i+1,1)-T(i,1))/T(i+1,1));
    Errorel4(i)=abs((T(i+1,jmax)-T(i,jmax))/T(i+1,jmax));
end

% Testando o Algoritmo utilizando a regra do trapézio
% Equação do calor integrada no volume

intl=0;
for i=2:imax-1
    intl=intl+(gama*(T(1,i)+T(1,i+1)+T(imax,i)+T(imax,i+1)+T(i,1)+T(i+1,1)+T(i,jmax)+T(i+1,jmax))/2-
    2*beta)*(deltay);
end

s=q*Lx*Ly;

% Calculando Erro Relativo
Errorel=abs((s-intl)/s);

% mesh(T)
% plot(T)

figure(1)
surf(T)
title('PERFIL DE TEMPERATURA DA PLACA')
xlabel('Largura')
ylabel('Altura')

```

```
zlabel('Temperatura (K)')
```

```
figure(2)
contour(T)
% title('Isotermas')
xlabel('Largura')
ylabel('Altura')
```

```
% C.C CONVECCÃO(h(T-T00))
```

```
% Face 1
```

```
%  $T(1,j) = (k \cdot T(2,j) + h \cdot \text{deltax} \cdot T1) / (h \cdot \text{deltax} + k)$ ;
```

```
% Face 3
```

```
%  $T(\text{imax},j) = (k \cdot T(\text{imax}-1,j) + h \cdot \text{deltax} \cdot T3) / (h \cdot \text{deltax} + k)$ ;
```

```
% Face 2
```

```
%  $T(i,1) = (k \cdot T(i,2) + h \cdot \text{deltay} \cdot T2) / (h \cdot \text{deltay} + k)$ ;
```

```
% Face 4
```

```
%  $T(i,j\text{max}) = (k \cdot T(i,j\text{max}-1) + h \cdot \text{deltay} \cdot T4) / (h \cdot \text{deltay} + k)$ ;
```

```
% C.C RADIAÇÃO_Newton-Raphson(s=stefan boltzman, emiss=emissividade)
```

```
% Face 1
```

```
%  $T(1,j) = T(1,j) + (T(2,j) - T(1,j) - s \cdot \text{emiss} \cdot \text{deltax} / K \cdot \text{abs}(T(1,j)^3) \cdot T(1,j)) / (1 + 4 \cdot \text{emiss} \cdot s \cdot \text{deltax} / K \cdot \text{abs}(T(1,j)^3))$ ;
```

```
% Face 3
```

```
%  $T(\text{imax},j) = T(\text{imax},j) + (-T(\text{imax},j) + T(\text{imax}-1,j) - s \cdot \text{emiss} \cdot \text{deltax} / K \cdot \text{abs}(T(\text{imax},j)^3) \cdot T(\text{imax},j)) / (1 + 4 \cdot \text{emiss} \cdot s \cdot \text{deltax} / K \cdot \text{abs}(T(\text{imax},j)^3))$ ;
```

```
% Face 2
```

```
%  $T(i,1) = T(i,1) + (T(i,2) - T(i,1) - s \cdot \text{emiss} \cdot \text{deltay} / K \cdot \text{abs}(T(i,1)^3) \cdot T(i,1)) / (1 + 4 \cdot s \cdot \text{emiss} \cdot \text{deltay} / K \cdot \text{abs}(T(i,1)^3))$ ;
```

```
% Face 4
```

```
%  $T(i,j\text{max}) = T(i,j\text{max}) + (-T(i,j\text{max}) + T(i,j\text{max}-1) - s \cdot \text{emiss} \cdot \text{deltay} / K \cdot \text{abs}(T(i,j\text{max})^3) \cdot T(i,j\text{max})) / (1 + 4 \cdot s \cdot \text{emiss} \cdot \text{deltay} / K \cdot \text{abs}(T(i,j\text{max})^3))$ ;
```

b) Simulação numérica para beta no loop simétrico

%%% Beta na Iteração %%%

close all; clear all; clc; format short;

%Beta na Iteração

%Geometria

Lx=10;
Ly=10;
imax=60;
jmax=60;
deltax=Lx/(imax-1);
deltay=Ly/(jmax-1);

%Parâmetros

q=1;
k=1;
erroT=1;
toleranciaT=1.d-6;
gama=100; *%Menor valor de gama para n° iteração convergir*
sigma=1;
c=10;
h=1;
Tamb=1;
%beta=0;

%Condições Iniciais

T=zeros(imax,jmax);
Tn=zeros(imax,jmax);
beta=zeros(imax,jmax);

n=0; *%Contador*

while erroT>toleranciaT

for i=2:imax-1
for j=2:jmax-1

%Interior

T(i,j)=(deltay^2*(T(i+1,j)+T(i-1,j))...
+deltax^2*(T(i,j+1)+T(i,j-1))...
+(deltax^2*deltay^2*q/k)/(2*deltay^2+2*deltax^2);

%Face 1

beta(1,j)=gama*T(1,j)-(sigma*abs(T(1,j)^3)*T(1,j)-c+h*(T(1,j)-Tamb)); *%Implementando beta1*
T(1,j)=(k*T(2,j)+beta(1,j)*deltax)/(gama*deltax+k);

%Face 3

beta(imax,j)=gama*T(imax,j)-(sigma*abs(T(imax,j)^3)*T(imax,j)-c+h*(T(imax,j)-Tamb));

%Implementando beta3

T(imax,j)=(k*T(imax-1,j)+beta(imax,j)*deltax)/(gama*deltax+k);

%Face 2

beta(i,1)=gama*T(i,1)-(sigma*abs(T(i,1)^3)*T(i,1)-c+h*(T(i,1)-Tamb)); *%Implementando beta2*
T(i,1)=(k*T(i,2)+beta(i,1)*deltay)/(gama*deltay+k);

%Face 4

beta(i,jmax)=gama*T(i,jmax)-(sigma*abs(T(i,jmax)^3)*T(i,jmax)-c+h*(T(i,jmax)-Tamb));

%Implementando beta4

```

T(i,jmax)=(k*T(i,jmax-1)+beta(i,jmax)*deltay)/(gama*deltay+k);

end
end
v=max(abs(T-Tn)); % Vetor com valores máximos
erroT=max(abs(v)); % Máximo valor do vetor
n=n+1 % Implemento do contador
Tn=T; % Atualização da matriz

% Testando utilização da variável beta(crescente em todas iterações de nós)
% Testando utilização da variável beta(limitante superior e inferior de gama)
beta(1,30)

end

% Vértices
T(1,1)=(T(1,2)+T(2,1))/2; % Vértice A
T(imax,1)=(T(imax-1,1)+T(imax,2))/2; % Vértice B
T(imax,jmax)=(T(imax-1,jmax)+T(imax,jmax-1))/2; % Vértice C
T(1,jmax)=(T(1,jmax-1)+T(2,jmax))/2; % Vértice D

%%% Verificação e Validação %%%

% Testando o Algoritmo
% T -> (beta/gama)
for i=2:imax-1
    T1(i)=T(1,i);
    T3(i)=T(imax,i);
    T2(i)=T(i,1);
    T4(i)=T(i,jmax);
end

% Calculando Erro Relativo
for i=2:imax-1
    Errorel1(i)=abs((T(1,i+1)-T(1,i))/T(i+1));
    Errorel3(i)=abs((T(imax,i+1)-T(imax,i))/T(imax,i+1));
    Errorel2(i)=abs((T(i+1,1)-T(i,1))/T(i+1,1));
    Errorel4(i)=abs((T(i+1,jmax)-T(i,jmax))/T(i+1,jmax));
end

% Testando o Algoritmo utilizando a regra do trapézio
% Equação do calor integrada no volume

intl=0;
for i=2:imax-1
    intl=intl+(gama*(T(1,i)+T(1,i+1)+T(imax,i)+T(imax,i+1)...
        +T(i,1)+T(i+1,1)+T(i,jmax)+T(i+1,jmax))/2-(beta(1,i)+beta(imax,i)+beta(i,1)+beta(i,jmax)))*(deltay);
end

% intl=0;
% for i=2:imax-1
% intl=intl+(gama*(T(1,i)+T(1,i+1)+T(imax,i)+T(imax,i+1)...
% +T(i,1)+T(i+1,1)+T(i,jmax)+T(i+1,jmax))...
% -(beta(1,i)+beta(1,i+1)+beta(imax,i)+beta(imax,i+1)+beta(i,1)+beta(i+1,1)...
% +beta(i,jmax)+beta(i+1,jmax)))*(deltay)/2;
% end

s=q*Lx*Ly;

```

```
%Calculando Erro Relativo
Errorel=abs((intl-s)/intl);

% mesh(T)
% plot(T)

figure(1)
surf(T)
title('PERFIL DE TEMPERATURA DA PLACA')
xlabel('Largura')
ylabel('Altura')
zlabel('Temperatura (K)')

figure(2)
contour(T)
% title('Isotermas')
xlabel('Largura')
ylabel('Altura')
```

c) Simulação numérica para beta no loop e termo fonte variante

```

                                %%% Beta na Iteração & termo fonte variante %%%

close all; clear all; clc; format short;

% Beta na Iteração & termo fonte variante

% Geometria
Lx=10;
Ly=10;
imax=60;
jmax=60;
deltax=Lx/(imax-1);
deltay=Ly/(jmax-1);

% Parâmetros
q=1;
k=1;
erroT=1;
toleranciaT=1.d-6;
gama=1.d2; %Menor valor de gama para n° iteração convergir
sigma=1;
%c=10;
h=1;
Tamb=1;
%beta=0;

% Condições Iniciais
T=zeros(imax,jmax);
Tn=zeros(imax,jmax);
beta=zeros(imax,jmax);
c=zeros(imax,jmax);

for i=2:imax-1
    c(1,i)=50; % termo fonte na face 1
    c(imax,i)=100;
    c(i,1)=10; % termo fonte na face 2
    c(i,jmax)=0;
end

n=0; % Contador
while erroT>toleranciaT
    for i=2:imax-1
        for j=2:jmax-1

            % Interior
            T(i,j)=(deltay^2*(T(i+1,j)+T(i-1,j))...
            +deltax^2*(T(i,j+1)+T(i,j-1))...
            +(deltax^2*deltay^2*q/k)/(2*deltay^2+2*deltax^2);

            % Implementação do Beta

            % Face 1
            beta(1,j)=gama*T(1,j)-(sigma*abs(T(1,j)^3)*T(1,j)-c(1,j)+h*(T(1,j)-Tamb)); % Implementando beta1
            T(1,j)=(k*T(2,j)+beta(1,j)*deltax)/(gama*deltax+k);

            % Face 3
            beta(imax,j)=gama*T(imax,j)-(sigma*abs(T(imax,j)^3)*T(imax,j)-c(imax,j)+h*(T(imax,j)-Tamb));
            % Implementando beta3

```

```

T(imax,j)=(k*T(imax-1,j)+beta(imax,j)*deltax)/(gama*deltax+k);

%Face 2
beta(i,1)=gama*T(i,1)-(sigma*abs(T(i,1)^3)*T(i,1)-c(i,1)+h*(T(i,1)-Tamb)); %Implementando beta2
T(i,1)=(k*T(i,2)+beta(i,1)*deltay)/(gama*deltay+k);

%Face 4
beta(i,jmax)=gama*T(i,jmax)-(sigma*abs(T(i,jmax)^3)*T(i,jmax)-c(i,jmax)+h*(T(i,jmax)-Tamb));
%Implementando beta4
T(i,jmax)=(k*T(i,jmax-1)+beta(i,jmax)*deltay)/(gama*deltay+k);

end
end

v=max(abs(T-Tn)); % Vetor com valores máximos
erroT=max(abs(v)); %Máximo valor do vetor
n=n+1 %Implemento do contador
Tn=T; %Atualização da matriz

%Testando utilização da variável beta(crescente em todas iterações de nós)
%Testando utilização da variável beta(limitante superior e inferior de gama)
beta(1,30)

end

% Vértices
T(1,1)=(T(1,2)+T(2,1))/2; %Vértice A
T(imax,1)=(T(imax-1,1)+T(imax,2))/2; %Vértice B
T(imax,jmax)=(T(imax-1,jmax)+T(imax,jmax-1))/2; %Vértice C
T(1,jmax)=(T(1,jmax-1)+T(2,jmax))/2; %Vértice D

%% Verificação e Validação %%

% Testando o Algoritmo
% T -> (beta/gama)
for i=2:imax-1
    T1(i)=T(1,i);
    T3(i)=T(imax,i);
    T2(i)=T(i,1);
    T4(i)=T(i,jmax);
end

%Calculando Erro Relativo
for i=2:imax-1
    Errorel1(i)=abs((T(1,i+1)-T(1,i))/T(i+1));
    Errorel3(i)=abs((T(imax,i+1)-T(imax,i))/T(imax,i+1));
    Errorel2(i)=abs((T(i+1,1)-T(i,1))/T(i+1,1));
    Errorel4(i)=abs((T(i+1,jmax)-T(i,jmax))/T(i+1,jmax));
end

% Testando o Algoritmo utilizando a regra do trapézio
% Equação do calor integrada no volume

intl=0;
for i=2:imax-1
    intl=intl+(gama*(T(1,i)+T(1,i+1)+T(imax,i)+T(imax,i+1)...
        +T(i,1)+T(i+1,1)+T(i,jmax)+T(i+1,jmax))/2-(beta(1,i)+beta(imax,i)+beta(i,1)+beta(i,jmax)))*(deltay);

```

```

end

% intl=0;
% for i=2:imax-1
%   intl=intl+(gama*(T(1,i)+T(1,i+1)+T(imax,i)+T(imax,i+1)...
%     +T(i,1)+T(i+1,1)+T(i,jmax)+T(i+1,jmax))...
%     -(beta(1,i)+beta(1,i+1)+beta(imax,i)+beta(imax,i+1)+beta(i,1)+beta(i+1,1)...
%     +beta(i,jmax)+beta(i+1,jmax)))*(deltay)/2;
% end

s=q*Lx*Ly;

%Calculando Erro Relativo
Errorel=abs((intl-s)/intl);

% mesh(T)
% plot(T)

figure(1)
surf(T)
title('PERFIL DE TEMPERATURA DA PLACA')
xlabel('Largura')
ylabel('Altura')
zlabel('Temperatura (K)')

figure(2)
contour(T)
%title('Isotermias')
xlabel('Largura')
ylabel('Altura')

```

d) Simulação numérica para beta no loop, termo fonte variante a cada passo de iteração e gama=100

```

%% Beta Verificar beta a cada iteração para gama=100 e analisar a velocidade de convergência%%

close all; clear all; clc; format short;

%Geometria
Lx=10;
Ly=10;
imax=60;
jmax=60;
deltax=Lx/(imax-1);
deltay=Ly/(jmax-1);

%Parâmetros
q=1;
k=1;
erroT=1;
toleranciaT=1.d-6;
gama=100; %Menor valor de gama para n° iteração convergir
sigma=1;
%c=10;
h=1;
Tamb=1;
%beta=0;

%Condições Iniciais
T=zeros(imax,jmax);
Tn=zeros(imax,jmax);
beta=zeros(imax,jmax);
c=zeros(imax,jmax);

for i=2:imax-1
    c(1,i)=50; %termo fonte na face 1
    c(imax,i)=100;
    c(i,1)=10; %termo fonte na face 2
    c(i,jmax)=0;
end

n=0; %Contador
while erroT>toleranciaT %n<2000
    for i=2:imax-1
        for j=2:jmax-1

            %Interior
            T(i,j)=(deltay^2*(T(i+1,j)+T(i-1,j))...
            +deltax^2*(T(i,j+1)+T(i,j-1))...
            +(deltax^2*deltay^2*q/k)/(2*deltay^2+2*deltax^2);

            %Implementação do Beta

            %Face 1
            beta(1,j)=gama*T(1,j)-(sigma*abs(T(1,j)^3)*T(1,j)-c(1,j)+h*(T(1,j)-Tamb)); %Implementando beta1
            T(1,j)=(k*T(2,j)+beta(1,j)*deltax)/(gama*deltax+k);

            %Face 3
            beta(imax,j)=gama*T(imax,j)-(sigma*abs(T(imax,j)^3)*T(imax,j)-c(imax,j)+h*(T(imax,j)-Tamb));
            %Implementando beta3
            T(imax,j)=(k*T(imax-1,j)+beta(imax,j)*deltax)/(gama*deltax+k);

```

```

%Face 2
beta(i,1)=gama*T(i,1)-(sigma*abs(T(i,1)^3)*T(i,1)-c(i,1)+h*(T(i,1)-Tamb)); %Implementando beta2
T(i,1)=(k*T(i,2)+beta(i,1)*deltay)/(gama*deltay+k);

%Face 4
beta(i,jmax)=gama*T(i,jmax)-(sigma*abs(T(i,jmax)^3)*T(i,jmax)-c(i,jmax)+h*(T(i,jmax)-Tamb));
%Implementando beta4
T(i,jmax)=(k*T(i,jmax-1)+beta(i,jmax)*deltay)/(gama*deltay+k);

end
end

v=max(abs(T-Tn)); % Vetor com valores máximos
erroT=max(abs(v)); %Máximo valor do vetor
n=n+1 %Implemento do contador
Tn=T; %Atualização da matriz

%Testando utilização da variável beta(crescente em todas iterações de nós)
%Testando utilização da variável beta(limitante superior e inferior de gama)

%beta(1,30)

%Vértices
T(1,1)=(T(1,2)+T(2,1))/2; %Vértice A
T(imax,1)=(T(imax-1,1)+T(imax,2))/2; %Vértice B
T(imax,jmax)=(T(imax-1,jmax)+T(imax,jmax-1))/2; %Vértice C
T(1,jmax)=(T(1,jmax-1)+T(2,jmax))/2; %Vértice D

figure(i)

surf(T)
title('PERFIL DE TEMPERATURA DA PLACA')
xlabel('Largura')
ylabel('Altura')
zlabel('Temperatura (K)')

end

%%% Verificação e Validação %%%

%Testando o Algoritmo
% T -> (beta/gama)
for i=2:imax-1
    T1(i)=T(1,i);
    T3(i)=T(imax,i);
    T2(i)=T(i,1);
    T4(i)=T(i,jmax);
end

%Calculando Erro Relativo
for i=2:imax-1
    Errorel1(i)=abs((T(1,i+1)-T(1,i))/T(i+1));
    Errorel3(i)=abs((T(imax,i+1)-T(imax,i))/T(imax,i+1));
    Errorel2(i)=abs((T(i+1,1)-T(i,1))/T(i+1,1));
    Errorel4(i)=abs((T(i+1,jmax)-T(i,jmax))/T(i+1,jmax));
end

```

```

% Testando o Algoritmo utilizando a regra do trapézio
% Equação do calor integrada no volume

intl=0;
for i=2:imax-1
    intl=intl+(gama*(T(1,i)+T(1,i+1)+T(imax,i)+T(imax,i+1)...
        +T(i,1)+T(i+1,1)+T(i,jmax)+T(i+1,jmax))/2-(beta(1,i)+beta(imax,i)+beta(i,1)+beta(i,jmax)))*(deltay);
end

% intl=0;
% for i=2:imax-1
%     intl=intl+(gama*(T(1,i)+T(1,i+1)+T(imax,i)+T(imax,i+1)...
%         +T(i,1)+T(i+1,1)+T(i,jmax)+T(i+1,jmax))...
%         -(beta(1,i)+beta(1,i+1)+beta(imax,i)+beta(imax,i+1)+beta(i,1)+beta(i+1,1)...
%         +beta(i,jmax)+beta(i+1,jmax)))*(deltay)/2;
% end

s=q*Lx*Ly;

%Calculando Erro Relativo
Errorel=abs((intl-s)/intl);

```

e) Simulação numérica para beta no loop, termo fonte variante a cada passo de iteração e gama=1000

```

%% % Beta Verificar beta a cada iteração para gama=1000 e analisar a velocidade de convergência %% %
close all; clear all; clc; format short;

% Geometria
Lx=10;
Ly=10;
imax=60;
jmax=60;
deltax=Lx/(imax-1);
deltay=Ly/(jmax-1);

% Parâmetros
q=1;
k=1;
erroT=1;
toleranciaT=1.d-6;
gama=1.d5; % Menor valor de gama para n° iteração convergir
sigma=1;
% c=10;
h=1;
Tamb=1;
% beta=0;

% Condições Iniciais
T=zeros(imax,jmax);
Tn=zeros(imax,jmax);
beta=zeros(imax,jmax);
c=zeros(imax,jmax);

for i=2:imax-1
    c(1,i)=50; % termo fonte na face 1
    c(imax,i)=100;
    c(i,1)=10; % termo fonte na face 2
    c(i,jmax)=0;
end

n=0; % Contador
while erroT>toleranciaT
    for i=2:imax-1
        for j=2:jmax-1

            % Interior
            T(i,j)=(deltay^2*(T(i+1,j)+T(i-1,j))...
            +deltax^2*(T(i,j+1)+T(i,j-1))...
            +(deltax^2*deltay^2*q/k)/(2*deltay^2+2*deltax^2);

            % Implementação do Beta

            % Face 1
            beta(1,j)=gama*T(1,j)-(sigma*abs(T(1,j)^3)*T(1,j)-c(1,j)+h*(T(1,j)-Tamb)); % Implementando beta1
            T(1,j)=(k*T(2,j)+beta(1,j)*deltax)/(gama*deltax+k);

            % Face 3
            beta(imax,j)=gama*T(imax,j)-(sigma*abs(T(imax,j)^3)*T(imax,j)-c(imax,j)+h*(T(imax,j)-Tamb));
            % Implementando beta3
            T(imax,j)=(k*T(imax-1,j)+beta(imax,j)*deltax)/(gama*deltax+k);

```

```

%Face 2
beta(i,1)=gama*T(i,1)-(sigma*abs(T(i,1)^3)*T(i,1)-c(i,1)+h*(T(i,1)-Tamb)); %Implementando beta2
T(i,1)=(k*T(i,2)+beta(i,1)*deltay)/(gama*deltay+k);

%Face 4
beta(i,jmax)=gama*T(i,jmax)-(sigma*abs(T(i,jmax)^3)*T(i,jmax)-c(i,jmax)+h*(T(i,jmax)-Tamb));
%Implementando beta4
T(i,jmax)=(k*T(i,jmax-1)+beta(i,jmax)*deltay)/(gama*deltay+k);

end
end

v=max(abs(T-Tn)); % Vetor com valores máximos
erroT=max(abs(v)); %Máximo valor do vetor
n=n+1 %Implemento do contador
Tn=T; %Atualização da matriz

%Testando utilização da variável beta(crescente em todas iterações de nós)
%Testando utilização da variável beta(limitante superior e inferior de gama)

%beta(1,30)

%Vértices
T(1,1)=(T(1,2)+T(2,1))/2; %Vértice A
T(imax,1)=(T(imax-1,1)+T(imax,2))/2; %Vértice B
T(imax,jmax)=(T(imax-1,jmax)+T(imax,jmax-1))/2; %Vértice C
T(1,jmax)=(T(1,jmax-1)+T(2,jmax))/2; %Vértice D

figure(i)

surf(T)
title('PERFIL DE TEMPERATURA DA PLACA')
xlabel('Largura')
ylabel('Altura')
zlabel('Temperatura (K)')

end

%%% Verificação e Validação %%%

%Testando o Algoritmo
% T -> (beta/gama)
for i=2:imax-1
    T1(i)=T(1,i);
    T3(i)=T(imax,i);
    T2(i)=T(i,1);
    T4(i)=T(i,jmax);
end

%Calculando Erro Relativo
for i=2:imax-1
    Errorel1(i)=abs((T(1,i+1)-T(1,i))/T(i+1));
    Errorel3(i)=abs((T(imax,i+1)-T(imax,i))/T(imax,i+1));
    Errorel2(i)=abs((T(i+1,1)-T(i,1))/T(i+1,1));
    Errorel4(i)=abs((T(i+1,jmax)-T(i,jmax))/T(i+1,jmax));
end

```

```

% Testando o Algoritmo utilizando a regra do trapézio
% Equação do calor integrada no volume

intl=0;
for i=2:imax-1
    intl=intl+(gama*(T(1,i)+T(1,i+1)+T(imax,i)+T(imax,i+1)...
        +T(i,1)+T(i+1,1)+T(i,jmax)+T(i+1,jmax))/2-(beta(1,i)+beta(imax,i)+beta(i,1)+beta(i,jmax)))*(deltay);
end

% intl=0;
% for i=2:imax-1
%     intl=intl+(gama*(T(1,i)+T(1,i+1)+T(imax,i)+T(imax,i+1)...
%         +T(i,1)+T(i+1,1)+T(i,jmax)+T(i+1,jmax))...
%         -(beta(1,i)+beta(1,i+1)+beta(imax,i)+beta(imax,i+1)+beta(i,1)+beta(i+1,1)...
%         +beta(i,jmax)+beta(i+1,jmax)))*(deltay)/2;
% end

s=q*Lx*Ly;

%Calculando Erro Relativo
Errorel=abs((intl-s)/intl);

```